Equations de Maxwell en présence d'une pointe conique de matériau négatif

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA Paris) - Palaiseau
Lucas CHESNEL, CMAP (Ecole Polytechnique, INRIA) - Palaiseau
Mahran RIHANI, POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA Paris) - Palaiseau

Ce travail concerne les équations de Maxwell en régime harmonique lorsque la permittivité diélectrique ε change de signe (ε et ε^{-1} étant des fonctions bornées). Supposons pour fixer les idées que l'on se place dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec une condition de conducteur parfait au bord, et que la perméabilité magnétique est celle du vide. On a montré dans [1] que les équations de Maxwell sont bien posées dans le cadre classique si le problème scalaire suivant est bien posé pour $f \in H^{-1}(\Omega)$:

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } \varphi \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' = \int_\Omega f\varphi', \quad \forall \varphi' \in H^1_0(\Omega).\end{array}\right. \tag{1}$$

Or nous savons que ce problème peut être mal posé lorsque ε change de signe. En particulier, si ε prend une valeur négative dans un sous-domaine $\mathcal{M}$ de Ω présentant une pointe conique, et une valeur positive hors de $\mathcal{M}$, le problème scalaire admet des solutions hyper-oscillantes au voisinage de la pointe du cône, qui ne sont pas dans $H^1(\Omega)$. On les appelle des ondes de trou noir car elles transportent une partie de l'énergie qui disparaît dans la pointe. Dans le cas bidimensionnel, nous avons montré comment restaurer le caractère bien posé du problème scalaire dans un cadre fonctionnel élargi, incluant les singularités de trou noir [2].
L'objectif de cette présentation, faisant suite à l'article [3], est d'expliquer comment établir un résultat similaire pour les équations de Maxwell 3D. On introduit pour cela l'espace suivant, où s^+ désigne la singularité de trou noir (on se place pour simplifier dans un cas où il n'en existe qu'une) :

$$\mathbf{X}(\varepsilon) = \{\boldsymbol{E} = c\nabla s^+ + \tilde{\boldsymbol{E}},\ c \in \mathbb{C},\ \tilde{\boldsymbol{E}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,|\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0 \text{ in } \Omega, \boldsymbol{E} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Nous sommes parvenus à démontrer que la formulation suivante, où le terme source $\boldsymbol{J}$ est régulier et à divergence nulle, relève de l'alternative de Fredholm :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } \boldsymbol{E} \in \mathbf{X}(\varepsilon) \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{E} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{E}'}\,dx - \omega^2 \fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{E} \cdot \overline{\boldsymbol{E}'}\,dx = i\omega \fint_\Omega \boldsymbol{J} \cdot \overline{\boldsymbol{E}'}\,dx, \qquad \forall \boldsymbol{E}' \in \mathbf{X}(\varepsilon).\end{array}\right. \tag{2}$$

Dans cette formulation, la difficulté vient de l'espace fonctionnel $\mathbf{X}(\varepsilon)$ qui n'est pas inclus dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, c'est pourquoi un symbole particulier apparaît dans la seconde et la troisième intégrale qui doivent être définies soigneusement. La démonstration utilise la théorie de Kondratiev et la notion de T-coercivité. On démontre au passage de nouveaux résultats sur les potentiels vecteurs pour des champs très singuliers.

[1] A. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr. *T-coercivity for the Maxwell problem with sign-changing coefficients.* Commun. in PDEs, **39(06)**, 1007–1031, 2014.

[2] A. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, X. Claeys. *Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial.* Math. Models Methods Appl. Sci., **23(9)**, 1629–1662, 2013.

[3] A. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, M. Rihani. *Maxwell's equations with hypersingularities at a conical plasmonic tip.* arXiv :2010.08472.

Contact : anne-sophie.bonnet-bendhia@ensta-paris.fr