Construction de modèles réduits pour la propagation d'incertitudes dans les systèmes de lois de conservation hyperboliques par méthodes aux moments

Gaël POËTTE, CEA - CESTA **Bruno DESPRÉS**, LJLL - Paris VI
Didier LUCOR, LINS-CNRS - Orsay

Nous nous intéressons à la propagation d'incertitudes dans des systèmes de lois de conservation hyperboliques. La forme générale de ces modèles est rappelée ci-dessous (omettons les conditions de bords pour simplifier)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0, x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, t \in [0,T], & \text{(1a)} \\ u(t=0,x) = u_0(x), \forall x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, & \text{(1b)} \end{cases}$$

où d est la dimension spatiale et $u \in \mathbb{R}^n$. En quantification d'incertitudes, il est classique de rendre explicite la dépendence en le vecteur de paramètres incertains $X \sim \mathrm{d}\mathcal{P}_X$ de sorte que (1) devient

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t,X) + \partial_x f(u(x,t,X),X) = 0, x \in \mathcal{D}(X) \subset \mathbb{R}^d, t \in [0,T], & \text{(2a)} \\ u(t=0,x,X) = u_0(x,X), \forall x \in \mathcal{D}(X), & \text{(2b)} \\ X \sim \mathrm{d}\mathcal{P}_X. & \text{(2c)} \end{cases}$$

Bien entendu, des valeurs différentes de X conduisent à des problèmes découplés : en principe, il n'y a pas de difficultés majeures. Le principal problème provient du fait qu'une propagation précise des incertitudes implique de nombreux calculs et peut être très coûteuse.
La ressemblance de (2a) avec un modèle cinétique (X faisant écho à la dimension spectrale) ouvre sur la possibilité d'appliquer les méthodologies classiques (en cinétique) de réduction de modèles (modèles S_n [1], P_n [4], M_n [3]) au système nonlinéaire (2).
Dans cet exposé, nous présenterons la construction de modèles réduits pour la capture de régimes incertains pour les systèmes de lois de conservation basée sur une analogie entre (2) et les modèles cinétiques. Nous présenterons progressivement quelques propriétés qu'il est possible d'espérer (convergence, caractère bien/mal posé [2]) des modèles réduits de l'équation de Burgers et des systèmes de Saint Venant et d'Euler. Nous insisterons sur les difficultes rencontrées et sur l'apport des méthodes aux moments [2].

[1] F. Chaland and G. Samba. Discrete ordinates method for the transport equation preserving one-dimensional spherical symmetry in two-dimensional cylindrical geometry. *Nuclear Science and Engineering*, 182(4) :417–434, 2016.

[2] Bruno Després, Gaël Poëtte, and Didier Lucor. *Robust Uncertainty Propagation in Systems of Conservation Laws with the Entropy Closure Method*, volume 92 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Uncertainty Quantification in Computational Fluid Dynamics, 2013.

[3] Teddy Pichard, Graham W. Alldredge, Stéphane Brull, Bruno Dubroca, and M. Frank. An approximation of the m$_2$ closure : Application to radiotherapy dose simulation. *J. Sci. Comput.*, 71(1) :71–108, 2017.

[4] Xavier Valentin. *Analyse mathématique et numérique des modèles Pn pour la simulation de problèmes de transport de photons*. PhD thesis, Paris Saclay, 2015. Thèse de doctorat dirigée par Lafitte-Godillon, Pauline et Enaux, Cédric Mathématiques appliquées.

Contact : gael.poette@cea.fr