Connections du type *Lemme du col* pour des systèmes Allen-Cahn elliptiques

Ramon OLIVER-BONAFOUX, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Paris

On se donne une fonction positive et régulière $V : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ ($k \geq 2$), que l'on appelle potentiel. On suppose que ce potentiel possède un nombre fini de zéros plus grand que 2. On dit qu'une courbe $\mathfrak{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ est une *connexion* si elle résout le système d'équations différentielles ordinaires

$$\mathfrak{q}''(t) = \nabla_u V(\mathfrak{q}(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

et converge vers un zéro du potentiel lorsque $t \to \pm\infty$. À notre connaissance, la recherche précédente sur ce problème s'est principalement consacrée aux connections qui sont des minimiseurs globales de la fonctionnelle d'énergie associée dans un espace de fonctions adéquat, voir par exemple [2]. Dans [3], on a obtenu par des méthodes variationnelles plusieurs résultats d'existence de connections *non minimisantes* sous des différents ensembles d'hypothèses sur le potentiel. Dans la preuve de ces résultats, on s'est notamment servi de plusieurs versions raffinées du Lemme du Col classique. La difficulté principal du problème réside dans la perte de la compacité due au fait que le domaine des connections est $\mathbb{R}$ et à la multiplicité des zéros du potentiel.
L'équation (1) est la version 1-dimensionnelle d'un système Allen-Cahn, i. e. le système d'équations en dérivées partielles elliptique

$$\Delta u = \nabla_u V(u), \quad \text{dans } \Omega \tag{2}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$. Le rôle joué par le système 1-dimensionel dans le système d'EDP est detaillé dans la bibliographie donnée et les références qu'y sont contenues. Voir notamment l'article [1].

Références

[1] S. Alama, L. Bronsard, C. Gui, *Stationary layered solutions in $\mathbb{R}^2$ for an Allen-Cahn system with multiple well potential.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. 5(4), 359–390 (1997).

[2] A. Monteil, F. Santambrogio, *Metric methods for heteroclinic connections in infinite dimensional spaces*, Indiana Univ. Math. J. (2018).

[3] R. Oliver-Bonafoux, *Mountain pass connections for elliptic Allen-Cahn systems.* Preprint arXiv :2103.03318, (2021).

Contact : ramon.oliver_bonafoux@upmc.fr