Méthodes numériques d'ordre élevé pour les modèles aux moments

Katia AIT-AMEUR, CMAP, École Polytechnique - Palaiseau
Samuel KOKH, CEA - Saclay
Marc MASSOT, CMAP, École Polytechnique - Palaiseau
Teddy PICHARD, CMAP, École Polytechnique - Palaiseau

On s'intéresse à des modèles aux moments décrivant la dynamique de brouillards de gouttes. Cette dynamique est représentée par une fonction de distribution $f(t, x, \vec{c}, S)$ de gouttes au temps t, au point x, de vitesse $\vec{c}$ et de taille S. L'équation de Williams-Boltzmann [4] décrit cette dynamique dans l'espace $(t, x, \vec{c}, S)$:

$$\underbrace{\partial_t f + \partial_x \cdot (\vec{c} f)}_{\text{Transport}} + \underbrace{\partial_{\vec{c}} \cdot (\vec{F} f)}_{\text{Traînée}} + \underbrace{\partial_S (K f)}_{\text{Évaporation}} = 0. \tag{1}$$

Compte tenu du coût de calcul requis pour la résolution numérique de l'équation de Williams Boltzmann, on dérive des modèles macroscopiques basés sur les moments en taille et en vitesse de la fonction de distribution f, définis par:

$$M_{i,j,k,l} = \int_0^1 \int_{R^3} S^l c_x^i c_y^j c_z^k f(t, x, \vec{c}, S) dS d^3\vec{c} \tag{2}$$

De manière classique, les modèles aux moments pour les sprays (notamment [3]) sont faiblement hyperboliques et génèrent des singularités de type δ-choc qui sont difficiles à capturer par les schémas numériques. La difficulté est d'assurer que le vecteur des moments $M_{i,j,k,l}$ calculé par le schéma numérique, appartient à l'espace convexe des moments. Ceci est d'une importance majeure car la fonction de distribution f est explicitement reconstruite à partir des moments. Cette propriété est appelée réalisabilité. Le but ici est de développer des schémas numériques d'ordre élevé en espace et en temps, précis, robustes et préservant les espaces convexes. On considère deux familles de schémas numériques : les schémas volumes finis cinétiques [1] et les schémas Galerkin discontinus d'ordre élevé [2]. Ces schémas génèrent des oscillations non physiques autour des discontinuités et un moyen d'y remédier est d'utiliser des limiteurs de pente. L'enjeu ici est d'amortir ces oscillations suffisamment pour assurer la réalisabilité et la stabilité sans que l'ordre de la méthode numérique ne soit impacté. La limitation est basée sur la méthode introduite dans [5] permettant de projeter les solutions numériques dans l'espace des moments à chaque pas de temps.

[1] F. Bouchut, S. Jin, X. Li. *Numerical approximations of pressureless and isothermal gas dynamics.* SIAM J. Num. Anal., **(41)**, 135–158, 2003.

[2] B. Cockburn, C.-W. Shu. *The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws.* J. of Comput. Phys., **2(141)**, 199–224, 1998.

[3] M. Essadki, S. De Chaisemartin, F. Laurent, M. Massot. *High order moment model for polydisperse evaporating sprays towards interfacial geometry.* SIAM J. on Appl. Math., **4(78)**, 2003–2027, 2018.

[4] F. Williams. *Spray combustion and atomization.* Physics of Fluids, **(1)**, 541–545, 1958.

[5] X. Zhang, Y. Xia, C.-W. Shu. *Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high order discontinuous galerkin schemes for conservation laws on triangular meshes.* J. Sci. Comput., **1(50)**, 29–62, 2012.

Contact : katia.ait-ameur@polytechnique.edu