

Mouvement par courbure moyenne et apprentissage par réseaux de neurones

Garry TERII, Institut Camille Jordan (ICJ) - Lyon

Dans cet exposé on s'intéressera à une nouvelle façon d'aborder le mouvement par courbure moyenne en utilisant les outils de l'apprentissage profond.

Le mouvement par courbure moyenne est un flot géométrique qui a été largement étudié théoriquement mais aussi numériquement [2, 1, 3]. Pour un domaine à bord régulier, le flot par courbure moyenne associé est le flot de gradient L^2 du périmètre. Ce qui rend le problème « fortement singulier » et son implémentation par des techniques directes de discrétisation est alors très difficile.

La modélisation d'un tel flot d'interfaces peut néanmoins se faire de manière très efficace grâce à la méthode champ de phase [2] qui repose sur une description implicite de l'interface. Elle consiste à introduire un paramètre d'échelle ε puis à décrire l'évolution d'une interface diffuse d'épaisseur de l'ordre de ε . Du point de vue variationnel, cela consiste à approcher le flot de gradient L^2 du périmètre par le flot de gradient L^2 de l'énergie de Cahn-Hilliard qui est donné par l'équation d'Allen-Cahn. On remplace ainsi notre problème « fortement singulier » par un problème plus régulier et plus simple à mettre en œuvre numériquement. Nous approchons pour cela le flot associé à l'équation d'Allen-Cahn en utilisant une méthode de splitting en temps, en combinant une convolution par un noyau de la chaleur et l'action d'un opérateur de réaction.

Bien que très performante, la méthode champ de phase a tout de même ses limites du fait du choix de la discrétisation et de la consistance en ε . Pour s'affranchir de ces limitations, nous utilisons une approche par les réseaux de neurones [4] et proposons des flots discrets permettant d'approcher le flot par courbure moyenne avec une meilleure précision. On s'inspire pour cela de la méthode de splitting précédente qui alterne l'action d'un opérateur de diffusion et un opérateur de réaction. Du point de vue des réseaux de neurones, cela revient à construire un réseau à deux couches cachées : une couche de convolution puis une fonction d'activation (qui est en fait un perceptron multicouche et dont les paramètres sont à apprendre). C'est ce que nous appelons un « réseau de splitting », brique de base à partir de laquelle on peut élaborer des réseaux plus généraux.

Les différentes expériences numériques faites avec ces réseaux nous font penser qu'un réseau de splitting permet de gagner en consistance et en stabilité par rapport aux schémas classiques. Elles mettent aussi en évidence des structures typiques pour approcher le flot par courbure moyenne. Ces expériences montrent également que cette approche peut être utilisée pour d'autres mouvements d'interfaces comme par exemple le flot par courbure moyenne anisotrope.

Dans cet exposé, je présenterai la méthode champ de phase appliquée au mouvement par courbure moyenne puis la construction avec la bibliothèque Pytorch des réseaux de splitting que nous proposons. Si le temps le permet, je présenterai d'autres applications de ce type de réseaux.

- [1] L. Ambrosio. *Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions*. In *Calculus of variations and partial differential equations*, pp. 5–93. Springer, 2000.
- [2] E. Bretin. *Mouvements par courbure moyenne et méthode de champs de phase*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2009.
- [3] Q. Du, X. Feng. *The phase field method for geometric moving interfaces and their numerical approximations*. *Handbook of Numerical Analysis*, **21**, 425–508, 2020.
- [4] I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, Y. Bengio. *Deep learning*, vol. 1. MIT press Cambridge, 2016.