Ondes en milieux quasi-périodiques

Le cas unidimensionnel dissipatif : Étude et résolution numérique

Pierre AMENOAGBADJI, POEMS - UMA - ENSTA Paris - IPP - Palaiseau
Sonia FLISS, POEMS - UMA - ENSTA Paris - IPP - Palaiseau
Patrick JOLY, POEMS - UMA - ENSTA Paris - IPP - Palaiseau

Les milieux quasi-périodiques sont connus pour leur structure ordonnée, mais non périodique. Depuis la découverte récente des quasi-cristaux, premiers exemples de milieux quasi-périodiques, ces milieux n'ont cessé de susciter de l'engouement, notamment en raison des remarquables propriétés physiques et en particulier photoniques qui leur sont attribuées. Il y a donc un intérêt réel à simuler la propagation des ondes dans de tels milieux.

Dans la littérature mathématique, la notion de quasi-périodicité (et plus généralement de presque périodicité) est bien connue [2]. Par exemple, une fonction d'une variable réelle est quasi-périodique d'ordre $n > 0$ si elle s'écrit comme la trace dans une direction donnée d'une fonction périodique de n variables. Les EDP avec des coefficients quasi-périodiques ont aussi fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques [5]. En particulier, l'homogénéisation des milieux quasi-périodiques s'appuie sur la méthode dite de *coupe* [1, 3, 6], qui consiste à prolonger l'EDP quasi-périodique en une EDP de dimension supérieure à coefficients périodiques, mais dégénérée (dans le sens où la partie principale de l'opérateur est non-elliptique). Il semble cependant que la méthode de coupe n'ait jamais été exploitée pour la résolution numérique, ou pour des problèmes de propagation d'ondes. Notre objectif est précisément de la développer dans ce cadre.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équation des ondes en régime harmonique, posée dans un milieu unidimensionnel quasi-périodique, et non borné. Dans un premier temps, le cas dissipatif est considéré. La méthode de coupe appliquée à ce problème conduit à la résolution d'un problème non-elliptique, posé en dimension supérieure, mais avec des coefficients périodiques. Pour ce nouveau problème, on peut alors adapter la méthode développée dans [4], qui repose sur la résolution de problèmes de cellule, et sur la construction d'un opérateur de *propagation* $\mathcal{P}$, solution d'une équation de Riccati stationnaire. L'analyse de cette méthode est sensiblement plus délicate que dans le cas de l'équation de Helmholtz complète, notamment à cause des propriétés spectrales radicalement différentes de $\mathcal{P}$, dues à la dégénérescence du problème. Des simulations numériques illustrent l'efficacité de la méthode globale. Des premiers résultats numériques concernant le cas non dissipatif sont également montrés.

[1] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions. *Local profiles for elliptic problems at different scales : defects in, and interfaces between periodic structures.* Communications in Partial Differential Equations, 2015. doi :10.1080/03605302.2015.1043464.

[2] H. Bohr. *Almost periodic functions (Translated from German)*, 1947.

[3] D. Gérard-Varet, N. Masmoudi. *Homogenization in polygonal domains.* Journal of the European Mathematical society, **13(5)**, 1477–1503, 2011.

[4] P. Joly, J.-R. Li, S. Fliss. *Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation.* Commun. Comput. Phys, **1(6)**, 945–973, 2006.

[5] B. M. Levitan, V. V. Zhikov. *Almost periodic functions and differential equations*, 1982.

[6] N. Wellander, S. Guenneau, E. Cherkaev. *Homogenization of quasiperiodic structures and two-scale cut-and-projection convergence.* arXiv e-prints, arXiv :1911.03560, 2019.

Contact : `pierre.amenoagbadji@ensta-paris.fr`