Equation de Schrödinger-Langevin logarithmique et mécanique des fluides quantique

Quentin CHAULEUR, IRMAR - Rennes

Dans cet exposé on s'intéresse à l'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = \lambda\psi\log(|\psi|^2) + \frac{1}{2i}\mu\psi\log\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right), \tag{1}$$

avec $\psi(0,x) = \psi_0(x)$, $x \in R^d$, $t \in R$, $\mu > 0$ et $\lambda \in R^*$. Cette équation apparaît dans plusieurs domaines de la physique moderne, comme par exemple en mécanique quantique [3], en cosmologie [2] ou en mécanique statistique. En effectuant la transformation de Madelung $\rho = |\psi|^2$ and $J = \Im(\psi^*\nabla\psi)$, l'équation (1) est directement reliée à l'équation de mécanique des fluides quantique compressible :

$$\partial_t \rho + J = 0 \tag{2}$$

$$\partial_t J + \left(\frac{J \otimes J}{\rho}\right) + \lambda\nabla\rho + \mu J = \frac{1}{2}\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right). \tag{3}$$

Nous décrirons dans cet exposé le comportement en temps long de solutions suffisamment régulières de ce système, via le théorème suivant :

Théorème 1. *Si $\lambda < 0$ (cas focalisant), sous certaines hypothèses de régularité, et en supposant que $\rho_0 \neq 0$, on a convergence de la densité ρ vers une fonction gaussienne*

$$\rho(t,.) \underset{t\to+\infty}{\rightharpoonup} c_\lambda e^{\lambda|x-x_\infty|^2} \quad \textit{faiblement dans } L^1(R^d),$$

avec $c_\lambda > 0$ et $x_\infty \in R$ uniquement déterminés par les conditions initales (ρ_0, J_0).
Si $\lambda > 0$ (cas défocalisant) et sous d'autres hypothèses de régularité, on note $\tilde{\rho}$ la fonction renormalisée définie par

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\tau(t)^{d/2}}\tilde{\rho}\left(t, \frac{x}{\tau(t)}\right),$$

où τ désigne l'unique solution $\mathcal{C}^\infty([0,\infty))$ de l'équation différentielle non-linéaire

$$\ddot{\tau} = \frac{2\lambda}{\tau} - \mu\dot{\tau}, \quad \tau(0) = 1, \quad \dot{\tau}(0) = 0. \tag{4}$$

Alors, en notant $c_0 := \|\rho_0\|_{L^1(R^d)}\pi^{-d/2}$, on a

$$\tilde{\rho}(t,.) \underset{t\to+\infty}{\rightharpoonup} c_0 e^{-|x|^2} \quad \textit{faiblement dans } L^1(R^d).$$

La preuve de ce théorème est l'objet de l'article [1], et sa démonstration repose sur l'étude de solutions particulières gaussiennes dont le comportement asymptotique peut être décrit explicitement via l'étude de l'équation différentielle non-linéaire (4). Des simulations numériques basées sur une méthode de splitting adaptée à l'équation (1) viendront également appuyer ces résultats.

Références

[1] Quentin Chauleur. Dynamics of the Schrödinger-Langevin equation. Preprint, archived at https ://arxiv.org/pdf/2004.06962.pdf, April 2020.

[2] Pierre-Henri Chavanis. Derivation of a generalized Schrödinger equation from the theory of scale relativity. *Eur.Phys.J.Plus*, 132(6) :286, 2017.

[3] Antonio Nassar and Salvador Miret-Artés. *Bohmian Mechanics, Open Quantum Systems and Continuous Measurements.* Springer, 01 2017.

Contact : `quentin.chauleur@ens-rennes.fr`