

Échantillonnage optimal et moindres carrés à poids

Albert COHEN, LJLL - Paris

Matthieu DOLBEAULT, LJLL - Paris

On s'intéresse à l'approximation d'une fonction $u \in V := L^2(D, \mu)$, où D est un domaine compact de $\mathbb{R}^d$ et μ une mesure de probabilité sur D , par un élément $\tilde{u}$ de V_n , un sous-espace vectoriel de V de dimension finie n . Pour construire $\tilde{u}$, on s'autorise à évaluer u en m points $x^1, \dots, x^m \in D$ tirés selon une distribution aléatoire choisie.

Dans cet exposé, on discutera du résultat suivant :

Théorème 1. *Il existe des constantes universelles $C, C' \geq 1$, un échantillonnage aléatoire $x^1, \dots, x^m$ avec $m \leq Cn$ et une application $\tilde{u} : D^m \times \mathbb{R}^m \mapsto V_n$ tels que*

$$\mathbb{E}_{\{x^1, \dots, x^m\}} \left(\|u - \tilde{u}(x^1, \dots, x^m, u(x^1), \dots, u(x^m))\|_{L^2(D, \mu)}^2 \right) \leq C' \min_{v \in V_n} \|u - v\|_{L^2(D, \mu)}^2.$$

La reconstruction $\tilde{u}$ est obtenue par une méthode de moindres carrés à poids, déjà utilisée dans [1] avec un échantillonnage constitué de points i.i.d selon une loi bien choisie. Cependant, un tel tirage ne permet pas exactement d'atteindre un budget optimal $m \sim n$, il faut en fait tirer de l'ordre de $n \ln n$ points pour obtenir une estimation d'erreur semblable au Théorème 1. On utilise alors une sparsification de l'échantillon précédent, qui fonctionne grâce aux résultats d'algèbre linéaire développés dans [2].

- [1] A. Cohen, G. Migliorati. *Optimal weighted least-squares methods*. The SMAI journal of computational mathematics, **3**, 181–203, 2017.
- [2] A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava. *Interlacing families ii : Mixed characteristic polynomials and the kadison—singer problem*. Annals of Mathematics, pp. 327–350, 2015.