Un problème isopérimétrique avec compétition entre le périmètre classique et un périmètre non-local

Benoît MERLET, Équipe INRIA RAPSODI - Laboratoire Paul Painlevé - Lille

Marc PEGON, Équipe INRIA RAPSODI - Laboratoire Paul Painlevé - Lille

Dans cet exposé, nous nous intéressons à un problème isopérimétrique dans lequel le périmètre $P(E)$ est remplacé par $P(E) - \gamma P_\varepsilon(E)$, où $\gamma \in (0,1)$ et P_ε est une énergie non-locale convergeant vers le périmètre lorsque ε tend vers 0. Pour ε petit, ce problème est relié au comportement pour des grandes masse $m > 0$ du modèle de goutte liquide de Gamow pour le noyau atomique, qui consiste à minimiser la fonctionnelle

$$P(E) + \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

parmi les ensembles $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de volume m, où G est un noyau positif, radial, intégrable et de premier moment fini (c'est-à-dire $|x|G(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$).

En dimension arbitraire $n \geq 2$, nous montrons que pour ε assez petit, le problème admet des minimiseurs, et que ces minimiseurs convergent vers la boule, et leur bord vers la sphère, lorsque $\varepsilon \to 0$ [2]. Pour le modèle de Gamow, cela signifie que si le premier moment de G est en-dessous d'un seuil critique explicite, le problème admet des minimiseurs de masse arbitrairement grande, ce qui contraste avec le cas des noyaux de Riesz, où il n'y a existence que pour des petites masses.

En dimension $n = 2$, nous montrons par un argument de *slicing* que les minimiseurs sont nécessairement convexes pour ε petit. En conséquence, les minimiseurs ont un bord presque circulaire, au sens où le bord est une petite perturbation Lipschitz d'un cercle. D'autre part, par un argument à la Fuglede, nous prouvons qu'en dimension arbitraire $n \geq 2$, la boule est l'unique minimiseur du problème, à translations près, parmi les ensembles à bord quasi-sphérique. En combinant ces deux arguments, nous obtenons qu'en dimension $n = 2$, le disque unité est l'unique minimiseur [1].

[1] B. Merlet, M. Pegon. *The isoperimetric problem for the perimeter minus a fraction of a nonlocal approximate perimeter in 2D.* hal-03181775, 2021.

[2] M. Pegon. *Large mass minimizers for isoperimetric problems with integrable nonlocal potentials.* arXiv:2003.01165, 2020.

Contact : marc.pegon@univ-lille.fr