Sur un problème d'évolution généralisé

Alexandre THOREL, LMAH - Le Havre

On étudie un problème de diffusion généralisée, en dynamique de population, posé dans un ouvert cylindrique $\Omega =]a,b[\times\omega$, où ω est un ouvert régulier de R^{n-1}. Le terme "diffusion généralisée" signifie ici que la diffusion spatiale s'écrit comme une combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien. Le terme biharmonique modélise la dispersion induite par des interactions à longues portées (au voisinage du voisinage). Ce travail s'inspire de [3].

Soit $T > 0$. On étudie le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) + \Delta^2 u(t,x,y) - k\Delta u(t,x,y) & = & f(t,x,y), & t \in]0,T], \ x \in]a,b[, \ y \in \omega, \\ u(t,x,\zeta) = \Delta u(t,x,\zeta) & = & 0, & t \in]0,T], \ (x,\zeta) \in]a,b[\times\partial\omega \\ u(t,a,y) = u(t,b,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,a,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,b,y) & = & 0, & t \in]0,T], \ y \in \omega \\ u(0,x,y) & = & u_0(x,y), & x \in]a,b[, \ y \in \omega, \end{cases}$$

où $k \in R$, $f \in L^p((0,T)\times\Omega)$, $p \in]1,+\infty[$ et u est une densité de population.

L'étude de ce problème structuré en temps et en espace est réalisé dans le cadre général des espaces de Banach construits sur les espaces L^p. Pour cela, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur de diffusion généralisée suivant :

$$\begin{cases} D(\mathcal{B}) & = & \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) : \Delta\varphi = 0 \text{ sur }]a,b[\times\partial\omega \text{ et } \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ sur } \{a,b\}\times\omega\right\} \\ \mathcal{B}\varphi & = & -\Delta^2\varphi + k\Delta\varphi, \quad \varphi \in D(\mathcal{B}). \end{cases}$$

Le problème EDP précédent se réécrit alors comme un problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} u'(t) - \mathcal{B}u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $u(t)(.) := u(t,.)$ et $f(t)(.) := f(t,.)$ avec $f \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$.

On montre alors l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy abstrait ayant la régularité maximale si et seulement si u_0 est dans un espace d'interpolation réel approprié. On utilise entre autres [1], [2], [4].

Cette étude s'inscrit dans le cadre général de l'analyse fonctionnelle et des EDP. Elle utilise principalement la théorie des semi-groupes, la théorie de l'interpolation réelle, le calcul fonctionnel, la théorie des espaces de Banach UMD.

Références

[1] G. Dore & A. Venni, *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operator*, Math. Z., 196, 1987, pp. 189-201.

[2] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau & A. Thorel, *On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain*, J. Math. Anal. Appl., 450, 2017, pp. 351-376.

[3] D.S. Cohen & J.D. Murray, “A generalized diffusion model for growth and dispersal in population”, *Journal of Mathematical Biology*, 12, Springer-Verlag, 1981, pp. 237-249.

[4] A. Thorel, “Operational approach for biharmonic equations in L^p-spaces”, *Journal of Evolution Equations*, 20, 2020, pp. 631-657.

Contact : alexandre.thorel@univ-lehavre.fr