

Théorie spectrale de l'opérateur de Pauli

Enguerrand LAVIGNE, I2M - Marseille

Nicolas RAYMOND, LAREMA - Angers

Loïc LE TREUST, I2M - Marseille

Thématiques : théorie spectrale, EDP, opérateurs de Cauchy-Riemann magnétiques, théorie de Hodge de Rham.

Nous considérerons l'opérateur de Pauli avec champ magnétique sur un anneau pris avec des conditions de Dirichlet. Cet opérateur correspond à l'hamiltonien de l'équation de Pauli ; une équation non relativiste de la mécanique quantique qui correspond à celle de Schrödinger pour les particules de spin 1/2 soumises à un champ magnétique.

Formellement, l'opérateur de Pauli agit sur un couple de fonctions de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_h = [\sigma \cdot (-ih\nabla - A)]^2,$$

avec $h > 0$ un paramètre semi-classique, σ un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ dont les composantes sont les matrices de Pauli σ_1 et σ_2 . On associe au champ magnétique, noté B , le potentiel $A = (A_1, A_2)$ vérifiant $B = \partial_x A_2 - \partial_y A_1$.

Nous poursuivons l'étude, lors de la limite semi-classique, du bas du spectre lorsque le champ magnétique est supposé strictement positif et radial. En combinant la nouvelle stratégie de preuve introduite par Jean-Marie Barbaroux, Loïc Le Treust, Nicolas Raymond et Edgardo Stockmeyer dans [1] et en réinterprétant les idées développées par Bernard Helffer et Mikael Persson Sundqvist dans [2], on obtient le comportement asymptotique suivant

$$\lambda_k(h) = \alpha_k(h) \sqrt{h} e^{\frac{2\phi_{min}}{h}} (1 + o_{h \rightarrow 0}(1)),$$

où

$$\alpha_k(h) = \min_{\substack{V \subset \mathbb{Z} \\ \#V = k}} \max_{m \in V} f\left(m - \frac{c_0}{h}\right),$$

avec $c_0 \in \mathbb{R}$, ϕ_{min} une constante strictement négative et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coercive connue explicitement en fonction des données du problème.

[1] J.-M. Barbaroux, L. Le Treust, N. Raymond, E. Stockmeyer. *On the semiclassical spectrum of the Dirichlet-Pauli operator*. Journal of the European Mathematical Society, 2020.

[2] B. Helffer, M. P. Sundqvist. *On the semi-classical analysis of the groundstate energy of the dirichlet pauli operator in non-simply connected domains*. arXiv preprint arXiv :1702.02404, 2017.