

Stabilité des schémas d'ordres élevés en domaine borné d'espace

Benjamin BOUTIN, IRMAR - Université de Rennes 1

Pierre LE BARBENCHON, IRMAR - Université de Rennes 1

Nicolas SEGUIN, IRMAR - Université de Rennes 1

Mots-clés : Stabilité, Méthode de Lax-Wendroff Inverse, Théorie GKS, Valeurs propres généralisées, Matrices Quasi-Toeplitz, Pseudo-spectre

Le but de cet exposé est d'étudier les schémas numériques d'ordres élevés en domaine borné d'espace et notamment les aspects de stabilité. L'étude est illustrée par des schémas numériques approchant les solutions de l'équation de transport en dimension 1.

La méthode de Lax-Wendroff Inverse décrite dans l'article [3] permet de fixer la consistance en entrée à un certain ordre. En effet, l'utilisation de l'EDP permet de transformer les dérivées spatiales en dérivée temporelle et donc de définir des points fantômes au bord du schéma ne dépendant que de la donnée de bord du problème. La consistance est préservée mais il faut s'assurer de la stabilité du schéma.

La théorie GKS introduite dans l'article [2] est un outil puissant pour étudier la stabilité des problèmes en domaine spatial borné. En effet, cet article donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème en domaine semi-borné (borné d'un seul côté) soit stable, notamment à travers l'étude de ce qu'on appellera des *valeurs propres généralisées*. Cette théorie détermine une condition suffisante pour que le problème en domaine entièrement borné (borné des deux côtés) puisse être traité en connaissant la stabilité avec chacun des bords. On donne plusieurs exemples qui illustrent les difficultés en présence de valeurs propres généralisées.

En considérant les matrices liées au schéma en domaine borné, on trouve des matrices Quasi-Toeplitz [1]. Leurs spectres ainsi que la limite des spectres quand on fait tendre la dimension de la matrice vers l'infini est un indicateur pour parler de stabilité, cependant il n'est pas suffisant pour conclure. On introduit donc la notion de ε -pseudo-spectre qui permet de mieux appréhender ce qu'il se passe quand la dimension augmente. La résolvente est alors un outil permettant de faire un potentiel lien entre le pseudo-spectre et la théorie GKS.

- [1] R. M. Beam, R. F. Warming. *The asymptotic spectra of banded Toeplitz and quasi-toeplitz matrices*. SIAM Journal on Scientific Computing, **14(4)**, 971–1006, 1993.
- [2] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, A. Sundström. *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II*. Mathematics of Computation, **26(119)**, 649–649, 1972.
- [3] F. Vilar, C.-W. Shu. *Development and stability analysis of the Inverse Lax Wendroff boundary treatment for central compact schemes*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **49(1)**, 39–67, 2015.