Nouvelles conditions de coins pour les algorithmes de décomposition de domaine en régime harmonique

Bruno DESPRÉS, LJLL/SU - Paris **Anouk NICOLOPOULOS**, UZH - Zurich
Bertrand THIERRY, CNRS-LJLL/SU - Paris

Le problème modèle de Helmholtz pour les ondes en régime harmonique est décrit dans un ouvert borné polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord extérieur Γ_{ext}. Cet ouvert est décomposé en sous-domaines également polygonaux Ω_i ne se recouvrant pas. Le squelette interne de la décomposition est noté $\Sigma = \bigcup(\partial\Omega_i/\Gamma_{\text{ext}})$ et Π désigne l'opérateur d'échange sur Σ. Les méthodes de décomposition de domaine itératives peuvent souvent s'écrire sous la forme ($\omega > 0$, $\mathbf{i}^2 = -1$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} (\Delta + \omega^2)\, u_i^{p+1} & = & f & \text{dans } \Omega_i,\ \forall i, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega T)\, u_\Sigma^{p+1} & = & -\left(\Pi\partial_n + \mathbf{i}\omega T\Pi\right) u_\Sigma^p & \text{sur } \Sigma, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega) u_\Gamma^{p+1} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Par exemple la méthode la plus simple correspond à $\Pi = I$. Les méthodes optimisées d'ordre deux et plus (Nataf et al, Geuzaine et al) construisent des opérateurs T à partir d'opérateurs différentiels issus de conditions absorbantes d'ordre élevé telles que $\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\partial_{tt}\right)\partial_n u - \mathbf{i}\omega u = 0$ sur Γ_{ext}. Les méthodes reposant sur le formalisme multitrace (Claeys et al) considèrent des opérateurs qui réalisent des isomorphismes entre des espaces fonctionnels optimaux pour les traces et dérivées normales. Une difficulté consiste à définir des espaces duaux $H^{\frac{1}{2}}/H^{-\frac{1}{2}}$ compatibles avec la structure géométrique du squelette Σ. Pour ces opérateurs T, l'algorithme (1) converge géométriquement.
La question que nous considérons est de partir d'opérateurs de transmission optimisés tels que

$$\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\partial_{tt}\right)\partial_{n_i} u_{ij}^{p+1} - \mathbf{i}\omega u_{ij}^{p+1} = -\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\partial_{tt}\right)\partial_{n_j} u_{ji}^{p} - \mathbf{i}\omega u_{ji}^{p} \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \subset \Sigma \tag{2}$$

et de définir des conditions de coins mixtes aux deux extrémités de l'interface $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ avec deux propriétés principales : a) les conditions de coins intérieurs (crosspoints en anglais, Gander et al) dérivent d'une condition de radiation artificielle à un coin extérieur ; b) l'algorithme itératif (1) est convergent.
Dans un travail précédent [1], nous avons obtenu de telles conditions absorbantes de coins artificielles. Cependant, inévitablement, la structure symétrique est détruite. Aussi les opérateurs T définis de cette manière ne peuvent pas être auto-adjoints, c'est à dire que $T^* \neq T$ dans $L^2(\Sigma)$. Il se trouve que la totalité de la littérature (voir par exemple Joly-Lecouvez et al) s'appuie sur le caractère auto-adjoint positif des opérateurs $T = T^* > 0$. Le résultat que l'on annonce est que l'on peut contourner cette condition grâce à de nouvelles estimations énergétiques s'appuyant sur des considérations abstraites.

Théorème 1. *Il existe des opérateurs T dérivant de conditions de radiation de coins tels que $T^* \neq T$, $T + T^* > 0$ et tels que l'algorithme de décomposition de domaine (1) converge.*

Quelques confirmations numériques se trouvent dans [1]. L'optimalité et l'efficacité numérique réelle de cette approche sont des questions ouvertes.

Références

[1] Bruno Després, Anouk Nicolopoulos, Bertrand Thierry, Corners and stable optimized domain decomposition methods for the Helmholtz problem, HAL 2020, `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02612368`.

Contact : `despres@ann.jussieu.fr`