Approximation de contrôles exacts pour une équation des ondes semi-linéaire

Arthur BOTTOIS, Laboratoire Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Jérôme LEMOINE, Laboratoire Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Arnaud MÜNCH, Laboratoire Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, avec frontière $C^{1,1}$ et $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert non vide. Soient $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$ et $q_T := \omega \times (0,T)$. Soit enfin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $|g(r)| \le C(1+|r|)\ln(2+|r|)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Pour tous $(u_0,u_1),(z_0,z_1) \in \mathbf{V} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'existence d'un contrôle $f \in L^2(q_T)$ pour le système

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y + g(y) = f 1_\omega & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), & (y,\partial_t y)(\cdot,0) = (u_0,u_1) \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

tel que $(y,\partial_t y)(\cdot,T) = (z_0,z_1)$ est donnée dans [2] en utilisant un argument de point fixe non constructif et en supposant T et ω suffisamment "grands". On note $\Box := \partial_{tt} - \Delta$. Soient

$$\mathcal{H} := \Big\{(y,f) \in L^2(Q_T) \times L^2(q_T) \mid \Box y \in L^2(Q_T),\ y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T),\ (y,\partial_t y)(\cdot,0) \in \mathbf{V}\Big\},$$

$$\mathcal{A} := \Big\{(y,f) \in \mathcal{H} \mid (y,\partial_t y)(\cdot,0) = (u_0,u_1),\ (y,\partial_t y)(\cdot,T) = (z_0,z_1)\Big\},$$

$$\mathcal{A}_0 := \Big\{(y,f) \in \mathcal{H} \mid (y,\partial_t y)(\cdot,0) = (0,0),\ (y,\partial_t y)(\cdot,T) = (0,0)\Big\}.$$

On discute et on illustre numériquement le résultat suivant énoncé dans [1].

Théorème 1. *Soit $E : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ défini par $E(y,f) := \frac{1}{2}\|\Box y + g(y) - f 1_\omega\|^2_{L^2(Q_T)}$. On suppose qu'il existe $s \in (0,1]$ tel que $\sup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\neq b}} \frac{|g'(a)-g'(b)|}{|a-b|^s} < +\infty$ et $\alpha \ge 0$, $\beta \in \Big[0, \sqrt{\frac{s}{2C(2s+1)}}\Big)$ tels que $|g'(r)| \le \alpha + \beta \ln^{1/2}(1+|r|)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $(y_0,f_0) \in \mathcal{A}$, la suite $(y_k,f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} (y_0,f_0) \in \mathcal{A}, \\ (y_{k+1},f_{k+1}) = (y_k,f_k) - \lambda_k(Y_k^1,F_k^1), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k = \operatorname{argmin}_{\lambda\in[0,1]} E\Big((y_k,f_k) - \lambda(Y_k^1,F_k^1)\Big), \end{cases} \tag{2}$$

où le couple $(Y_k^1,F_k^1) \in \mathcal{A}_0$ est constitué de la solution contrôlée et du contrôle (à zéro) de norme minimale associés au système linéarisé

$$\begin{cases} \Box Y_k^1 + g'(y_k)Y_k^1 = F_k^1 1_\omega + \Box y_k + g(y_k) - f_k 1_\omega & \text{dans } Q_T, \\ Y_k^1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), & (Y_k^1,\partial_t Y_k^1)(\cdot,0) = (0,0) \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

converge fortement vers un couple $(\overline{y},\overline{f}) \in \mathcal{A}$ vérifiant le problème de contrôle associé à (1). De plus, la convergence est au moins linéaire, puis au moins d'ordre $1+s$ après un nombre fini d'itérations.

[1] A. Bottois, J. Lemoine, A. Münch. *Constructive exact control of semilinear multi-dimensional wave equations by a least-squares approach.* Preprint, 2021.

[2] X. Fu, J. Yong, X. Zhang. *Exact controllability for multidimensional semilinear hyperbolic equations.* SIAM J. Control Optim., **46(5)**, 2007.

Contact : `arthur.bottois@uca.fr`