Un problème à discontinuité libre issu de l'isolation thermique

Camille LABOURIE, University of Cyprus - Nicosie

Les problèmes à discontinuité libre dans $\mathbf{R}^n$ consistent à minimiser l'énergie d'un couple (u, K) formé d'un ensemble K de dimension $(n-1)$ et d'une fonction u de classe C^1 en dehors de K. L'énergie présente une compétition entre une énergie de type Dirichlet de u dans $\mathbf{R}^n \setminus K$ et une énergie de surface de K. On interpète K comme une hypersurface (avec possiblement des singularités) où la fonction u fait un saut. Ceci permet de réduire les oscillations locales de u dans $\mathbf{R}^n \setminus K$.
On présente un problème à discontinuité libre qui minimise l'énergie d'une configuration d'isolation thermique. Ce problème a été étudié par Caffarelli–Kriventsov et Bucur–Giacomini en relaxant la fonctionnelle dans l'espace de fonctions SBV. Il s'agit de minimiser

$$E(u) = \int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + \int_{J_u} (u^-)^2 + (u^+)^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} + \mathcal{L}^n(\{\, u > 0 \,\}) \tag{1}$$

parmi les fonctions $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ telles que $u = 1$ sur un domaine fixé $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Les minimiseurs u ont la propriété d'être harmoniques et de réaliser une condition de Robin au bord de l'ensemble de discontinuité.
On motivera d'abord l'espace SBV et la fonctionnelle. On expliquera ensuite comment montrer $|\nabla u|$ est localement intégrable avec un exposant > 2 et on fera le lien avec la dimension du sous-ensemble Σ des points singuliers de K.

Théorème 1 (Théorème informel issu de [4])**.** *Soit $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ un minimiseur de (1). Alors il existe $p > 2$ tel que $|\nabla u| \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ et*

$$\dim(\Sigma) \leq \max\left(n - \frac{p}{2}, n - 8\right) < n - 1.$$

[1] D. Bucur, A. Giacomini. *Shape optimization problems with Robin conditions on the free boundary.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **33(6)**, 1539–1568, 2016. doi : 10.1016/j.anihpc.2015.07.001.

[2] L. A. Caffarelli, D. Kriventsov. *A free boundary problem related to thermal insulation.* Comm. Partial Differential Equations, **41(7)**, 1149–1182, 2016. doi :10.1080/03605302.2016.1199038.

[3] D. Kriventsov. *A free boundary problem related to thermal insulation : flat implies smooth.* Calc. Var. Partial Differential Equations, **58(2)**, Paper No. 78, 83, 2019. doi :10.1007/s00526-019-1509-0.

[4] C. Labourie, E. Milakis. *Higher integrability of the gradient for the thermal insulation problem*, 2021.

Contact : `labourie.camille@ucy.ac.cy`