Commande basée-événement pour l'équation des ondes

Florent KOUDOHODE, LAAS-CNRS - Toulouse
Lucie BAUDOUIN, LAAS-CNRS - Toulouse
Sophie TARBOURICH, LAAS-CNRS - Toulouse

Une équation des ondes posée en domaine borné et contenant un terme d'amortissement visqueux classique (proportionnel à la vitesse de l'onde) comme source est connue pour être exponentiellement stable [2].
Ce travail s'intéresse à la stabilisation de l'équation des ondes par le biais d'un tel amortissement qui serait, pour des raisons pratiques, échantillonné en temps. L'enjeu est de démontrer sous quelles conditions et selon quelle loi de mise à jour temporelle la stabilité exponentielle du système est conservée. Dans un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, regulier de classe C^2, avec un coefficient d'amortissement constant $\alpha > 0$, le système considéré est défini par

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(x,t) - \Delta z(t,x) = -\alpha \partial_t z(x,t_k), & \forall (x,t) \in \Omega \times [t_k, t_{k+1}), \\ z(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ z(x,0) = z_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t z(x,0) = z_1(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où la loi d'échantillonnage s'écrit :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{k+1} = \inf \left\{ t \geq t_k \text{ such that } \|\partial_t z(x,t) - \partial_t z(x,t_k)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \gamma E(t) \right\}. \end{cases} \tag{2}$$

où $E(t) = \frac{1}{2}\left(\|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$. La loi proposée permet de mettre à jour l'amortissement de manière ajustée au besoin réel, en monitorant l'évolution de l'énergie du système. La stabilité est alors assurée de manière plus optimale. Une démonstration utilisant une fonctionnelle de Lyapunov et une formulation matricielle permet d'affirmer le théorème suivant

Théorème 1. *Sous des conditions initiales* $(z_0, z_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *le système* (1) *soumis à la loi* (2) *admet une unique solution* $z \in C^0((0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,+\infty); H_0^1(\Omega))$ *et le phénomène de Zéno (où la mise à jour se répète de manière infinie en un temps fini) est évité.*
En supposant que l'on peut choisir des paramètres de conception ε *et* γ *et des scalaires positifs* λ_1 *et* λ_2 *de sorte que l'inégalité matricielle suivante soit faisable,*
$\Phi := \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \alpha\varepsilon\delta & \delta\varepsilon & 0 & \frac{\alpha\varepsilon}{2} \\ \star & \varepsilon - \alpha + \delta + \lambda_2\frac{\gamma}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ \star & \star & \delta - \varepsilon + \lambda_1 C_\Omega^2 + \lambda_2\frac{\gamma}{2} & 0 \\ \star & \star & \star & -\lambda_2 \end{pmatrix} \prec 0$, *le système* (1) *soumis à la loi de mise à jour* (2) *est exponentiellement stable : il existe* $K > 0$ *et* $\delta > 0$ *tel que* $E(t) \leq KE(0)e^{-2\delta t}$

Ce résultat est une amélioration de ce qui est décrit dans [1].

Références

[1] Lucie Baudouin, Swann Marx, and Sophie Tarbouriech. Event-triggered damping of a linear wave equation. *IFAC-PapersOnLine*, 52(2) :58–63, 2019.

[2] Goong Chen. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17(1) :66–81, 1979.

Contact : `fkoudohode@laas.fr`