

Un problème d'homogénéisation périodique en présence de défauts

Rémi GOUDEY, CERMICS, Ecole des Ponts et INRIA Paris - Champs sur Marne

Dans cette communication, je considérerai un problème d'homogénéisation pour l'équation de diffusion $-\operatorname{div}(a(\cdot/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon) = f$ où le coefficient a décrit une géométrie périodique perturbée.

Dans un premier temps, les perturbations considérées seront caractérisées par des défauts non localisés mais devenant rares à l'infini. Plus précisément, l'ensemble des coefficients étudiés s'écriront comme la somme d'un coefficient périodique a_{per} et d'une perturbation $\tilde{a}$ se comportant comme des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ au voisinage de points séparés d'une distance exponentiellement croissante lorsqu'on s'éloigne de l'origine.

Dans un cadre fonctionnel adapté au problème, on peut montrer l'existence d'une solution w de l'équation du correcteur $-\operatorname{div}(a(\nabla w + p)) = 0$ posée sur tout l'espace $\mathbb{R}^d$, dont le gradient partage la même structure "périodique + perturbation rare à l'infini" que le coefficient a . Ce correcteur permet alors d'identifier la limite homogénéisée de la suite u^ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et d'établir des taux de convergence vers cette limite.

Dans un second temps, je considérerai un cadre de géométrie périodique à l'infini, caractérisé par des propriétés d'intégrabilité des dérivées discrètes du coefficient : $\delta a = (a(\cdot + e_i) - a)_{i \in \{1, \dots, d\}} \in L^r(\mathbb{R}^d)$, où e_i désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $r \in]1, +\infty[$. Sous l'hypothèse $r < d$, il est également possible de montrer l'existence d'un correcteur adapté à ce cadre et d'identifier la limite de la suite u^ε .

Ce travail s'inscrit directement dans la continuité de plusieurs travaux [1, 2, 3] dans lesquels les auteurs ont développé une théorie de l'homogénéisation similaire dans un cadre où la géométrie périodique est perturbée par un défaut localisé $\tilde{a}$ appartenant à un espace $L^r(\mathbb{R}^d)$ pour $r \in]1, +\infty[$.

- [1] X. Blanc, M. Josien, C. Le Bris. *Precised approximations in elliptic homogenization beyond the periodic setting*. Asymptotic Analysis, **116(2)**, 93–137, 2020.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions. *A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects*. Milan Journal of Mathematics, **80(2)**, 351–367, 2012.
- [3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions. *On correctors for linear elliptic homogenization in the presence of local defects*. Communications in Partial Differential Equations, **43(6)**, 965–997, 2018.
- [4] R. Goudey. *A periodic homogenization problem with defects rare at infinity*. preprint, thèse en préparation.