Extension d'immersions injectives pour la synthèse d'observateurs

Pauline BERNARD, CAS, MINES ParisTech, Université PSL - Paris
Laurent PRALY, CAS, MINES ParisTech, Université PSL - Paris
Vincent ANDRIEU, LAGEPP, CNRS - Lyon

Dans de nombreuses applications, estimer en temps réel l'état d'un système dynamique

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad y = h(x) \tag{1}$$

à partir des sorties y mesurées est crucial, que ce soit à des fins de stabilisation, de surveillance, etc. Parmi les solutions possibles, la synthèse d'observateur consiste à implémenter un système dynamique

$$\dot{z} = \varphi(z, y) \quad , \quad \hat{x} = \tau(z) \tag{2}$$

prenant en entrée les mesures $y = h(x)$ de (1) et dont l'état z permet asymptotiquement de construire une estimée $\hat{x}$ de l'état du système x de (1), i.e., tel que $\lim_{t\to+\infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0$.
Lorsque f est non linéaire, il n'existe pas de synthèse systématique, à part pour des formes particulières (affines en l'état, triangulaires etc) Il s'agit donc en général de trouver un changement de coordonnées qui transforme la dynamique (1) dans l'une de ces formes, puis synthétiser l'observateur φ dans ces coordonnées, et enfin inverser la transformation pour retrouver l'estimée $\hat{x}$ dans les coordonnées initiales. En d'autres termes, il existe une application injective $T : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x} \to T(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^{n_z}$ avec $n_z \geq n_x$, tel que $\lim_{t\to+\infty} |z(t) - T(x(t))| = 0$ et τ est une inverse à gauche de T, qui doit être définie sur $\mathbb{R}^{n_z}$ puisque z n'a aucune raison de rester dans la variété différentielle $T(\mathcal{S})$.
Malheureusement, dans la plupart des cas, une expression analytique et globale de cette inverse à gauche n'est pas disponible. La voie de l'inversion numérique par minimisation n'est alors pas forcément envisageable en ligne, dû au coût en calcul et au manque de garanties de convergence en l'absence de convexité. Nous proposons donc une alternative qui consiste à ramener la dynamique de l'observateur (2) directement dans les coordonnées initiales.
Pour cela, nous proposons d'augmenter et d'étendre T en un difféomorphisme surjectif, quitte à ajouter des coordonnées fictives $w \in \mathbb{R}^{n_z - n_x}$ à x, i.e., nous nous intéressons au problème suivant.

Problème. *Etant donnés une immersion injective $T : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x} \to T(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^{n_z}$ et un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$, trouver un difféomorphisme $T_e : \mathcal{S}_e \subset \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_z - n_x} \to \mathbb{R}^{n_z}$ tel que*

1. *$T_e(x, 0) = T(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$*
2. *$T_e(\mathcal{S}_e) = \mathbb{R}^{n_z}$.*

En effet, tant que les solutions $t \mapsto x(t)$ de (1) à estimer restent dans $\mathcal{X}$, l'observateur (2) peut alors s'implémenter dans les coordonnées initiales comme

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{pmatrix} = \left(\frac{dT_e}{d(x,w)}(\hat{x}, \hat{w}) \right)^{-1} \varphi(T_e(\hat{x}, \hat{w}), y)$$

dont les solutions sont complètes (grâce à 1.) et vérifient (grâce à 2.)

$$\lim_{t\to+\infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0 \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} |\hat{w}(t)| = 0 \; .$$

Nous présenterons des conditions et une méthodologie permettant de résoudre ce problème, par complétion de matrice jacobienne et extension d'image de difféomorphisme. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées en optimisation pour assurer la convergence globale d'algorithmes d'inversion numériques, tels une descente de gradient ou un algorithme de Newton par exemple.

Source : P. Bernard, L. Praly, V. Andrieu, Expressing an observer in preferred coordinates by transforming an injective immersion into a surjective diffeomorphism, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol 56, No. 3, pp. 2327–2352, 2018, `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01199791`

Contact : `pauline.bernard@mines-paristech.fr`