

Estimations d'erreur *a posteriori* pour le couplage des équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection–diffusion–réaction.

Joanna FADDOUL, LAGA et USJ - Villetaneuse et Beyrouth

Pascal OMNES, LAGA et CEA STMF - Villetaneuse et Saclay

Toni SAYAH, Laboratoire de mathématiques et applications, USJ - Beyrouth

Le couplage des équations de Navier-Stokes instationnaires avec l'équation de convection-diffusion-réaction décrit le comportement d'un fluide avec des variations soit de la température du milieu considéré soit de la concentration d'un élément chimique dans le fluide.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ et $[0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Le problème à résoudre se modélise alors comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \operatorname{div} (\nu(C(x, t)) \nabla \mathbf{u}(x, t)) \\ \quad + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, t) + \nabla p(x, t) = \mathbf{f}(x, C(x, t)) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla) C(x, t) \\ \quad - \alpha \Delta C(x, t) + r_0 C(x, t) = g(x, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \end{array} \right.$$

où $(\mathbf{u}, p, C)$ sont les inconnues de vitesse, pression, température ou concentration et ν la viscosité du fluide, $\mathbf{f}$ et g des termes sources, α la constante de diffusion, r_0 une constante positive.

Nous avons commencé par proposer une formulation variationnelle que nous avons discrétisée en utilisant la méthode d'Euler semi-implicite d'ordre 1 en temps et en utilisant la méthode des éléments finis « P1 bulle/P1/P1 » en espace. Puis, nous avons établi une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte et la solution numérique, dans le but d'appliquer des techniques d'adaptation du maillage et du pas de temps. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1. *Supposons $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n$. Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, la solution continue $(\mathbf{u}, p, C)$ et la solution discrète $(\mathbf{u}_h, p_h, C_h)$ vérifient l'estimation d'erreur *a posteriori* suivante :*

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]^2(t_m) + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(0, t_m; X')} \\ & + [[C - C_h]]^2(t_m) + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \pi_\tau \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h) \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(0, t_m; X')} \\ & \leq c \left(\|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0, t_m; X')}^2 + \|C_0 - C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_X^2 + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0, t_m; L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2) \right). \end{aligned}$$

La norme $[[\cdot]]$ est somme de la norme $L^2(\Omega)$ et de la norme $L^2(0, T; H_0^1)$; les interpolations π_τ et $\pi_{l,\tau}$ sont constantes par intervalles de temps. Les indicateurs d'erreurs sont définis par :

$$\begin{aligned} (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 &= \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, & (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 &= \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, \\ (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \operatorname{div} (\nu(C_h^{n-1}) \nabla \mathbf{u}_h^n) - \mathbf{u}_h^{n-1} \nabla \mathbf{u}_h^n \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n(x) \right\|_{0,\kappa_n}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| (\nu(C_h^{n-1}) \nabla \mathbf{u}_h^n - p_h^n \mathbf{I})(\sigma) \cdot n \right\|_{0,e_n}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{0,\kappa_n}^2, \\ (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0,\kappa_n}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| \alpha \nabla C_h^n(\sigma) \cdot n \right\|_{0,e_n}^2. \end{aligned}$$

Contact : joanna.k.faddoul@gmail.com