Discrétisation d'EDPs anisotropes sur grille cartésienne

Jean-Marie MIREBEAU, Centre Borelli, ENS Paris-Saclay - Gif-sur-Yvette

Frederic BONNANS, Inria-Saclay and CMAP, École Polytechnique - Palaiseau
Guillaume BONNET, LMO, Université Paris-Saclay - Orsay
François DESQUILBET, LJK, Université Grenoble-Alpes - Grenoble
Ludovic METIVIER, LJK, Université Grenoble-Alpes - Grenoble

Une équation aux dérivées partielles est dite anisotrope, si elle privilégie localement certaines directions spatiales. L'anisotropie est un phénomène générique et omniprésent, pouvant être issu de l'homogénéisation d'une micro-structure physique, de la structure mathématique d'un domaine comme l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ des positions et orientations, être lié à la proximité du bord, etc.
La réduction de Voronoi est un outil de géométrie algorithmique, initialement dédié à la classification des formes quadratiques à coefficients entiers. Elle définit une décomposition de toute matrice symétrique définie positive D sous la forme

$$D = \sum_{1 \le i \le I} \sigma_i e_i e_i^T, \qquad \text{où} \quad \sigma_i \ge 0,\ e_i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ \forall 1 \le i \le I.$$

Noter que les vecteurs e_i sont à coordonnées entières, contrairement à la décomposition associées aux valeurs propres qui fait intervenir des vecteurs quelconques de norme unité.
Je montrerai que cette décomposition permet de construire des schémas numériques particulièrement efficaces pour la résolution des EDPs anisotropes sur grille cartésienne, et préservant les propriétés de structurelles de monotonie ou de causalité de l'EDP. Ceci inclut généralisations anisotropes de l'équation eikonale, qui est non-linéaire et d'ordre un, correspondant à l'asymptotique haute fréquence de l'équation des ondes sismiques [3], ou pour le calcul de chemins minimisant globalement une énergie faisant intervenir la courbure [4]. La méthode s'applique également aux équations totalement non-linéaires d'ordre deux, comme celle de Pucci [2] ou de Monge-Ampère, et des variantes adéquates permettent de contrôler l'interaction des termes d'ordre un et deux [1].

[1] F. Bonnans, G. Bonnet, J.-M. Mirebeau. *Second order monotone finite differences discretization of linear anisotropic differential operators.* submitted, 2020.

[2] J. Bonnans, G. Bonnet, J.-M. Mirebeau. *Monotone and second order consistent scheme for the two dimensional Pucci equation.* Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2019, 2020.

[3] F. Desquilbet, J. Cao, P. Cupillard, L. Métivier, J.-M. Mirebeau. *Single pass computation of first seismic wave travel time in three dimensional heterogeneous media with general anisotropy.* submitted, 2020.

[4] J.-M. Mirebeau, L. Gayraud, R. Barrère, D. Chen, F. Desquilbet. *Massively parallel computation of globally optimal shortest paths with curvature penalization.* submitted, 2021.

Contact : `jean-marie.mirebeau@ens-paris-saclay.fr`