Un schéma aux différences finies linéaire pour approcher la distance de Randers sur une grille cartésienne

J. Frédéric BONNANS, CMAP - Palaiseau **Guillaume BONNET**, LMO - Orsay
Jean-Marie MIREBEAU, Centre Borelli - Gif-sur-Yvette

La distance de Randers est une généralisation asymétrique de la distance riemannienne, dont les applications incluent le problème de Zermelo de navigation en présence de courants, la segmentation d'images, l'étude de vortex quantiques, la pénalisation de courbure de chemins et la relativité générale. Elle illustre en particulier le fait qu'il soit moins coûteux de déplacer un véhicule dans le sens du courant, ou bien en direction des basses altitudes, plutôt que dans la direction opposée.
Une métrique de Randers dans un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est décrite, pour sa partie symétrique, par un champ de matrices symétriques définies positives $M : \overline{\Omega} \to \mathcal{S}_d^{++}$ et, pour sa partie asymétrique, par un champ de vecteurs $\omega : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ satisfaisant en tout point $x \in \Omega$ la condition de compatibilité $\langle \omega(x), M(x)^{-1}\omega(x)\rangle < 1$ (le cas particulier d'un champ de vecteurs ω identiquement nul correspondant à une métrique riemannienne). La fonction distance de Randers $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ du bord de Ω à un point $x \in \overline{\Omega}$ associée à cette métrique peut être définie comme

$$\mathbf{u}(x) := \min_{\gamma \in \Gamma_x} \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\, dt, \qquad \mathcal{F}_y(v) := \langle v, M(y)v\rangle^{1/2} + \langle \omega(y), v\rangle,$$

où Γ_x est l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes γ de l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\overline{\Omega}$ telles que $\gamma(0) \in \partial\Omega$ et $\gamma(1) = x$.
Nous présenterons une méthode numérique [1] permettant d'approcher la distance de Randers $\mathbf{u}$, qui étend une méthode proposée auparavant dans le cadre riemannien [2]. Dans notre cadre, la méthode repose sur la propriété suivante, liée à la formule de Varadhan :

$$\mathbf{u} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{u}_\varepsilon, \qquad \mathbf{u}_\varepsilon = -\varepsilon \log u_\varepsilon,$$

où $u_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation linéaire

$$u_\varepsilon + 2\varepsilon\langle b, \nabla u_\varepsilon\rangle - \varepsilon^2 \operatorname{Tr}(A_b \nabla^2 u_\varepsilon) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 1 \quad \text{on } \partial\Omega$$

et les coefficients $b(x)$ et $A_b(x)$ sont définis à partir de $M(x)$ et $\omega(x)$ par des relations algébriques simples.
Nous proposerons une discrétization monotone de cette équation linéaire sur la grille cartésienne $\Omega \cap h\mathbb{Z}^d$, en nous servant d'outils issus de l'étude des réseaux de petite dimension. Nous expliquerons pourquoi le choix optimal du paramètre ε est de l'ordre de $h^{2/3}$. Nous présenterons les avantages de la méthode numérique proposée par rapport à une approximation plus directe de $\mathbf{u}$ et nous montrerons en particulier qu'elle s'adapte bien à la résolution de la régularisation entropique de problèmes de transport optimal discrets, comme cela a été fait auparavant dans le cadre riemannien [3]. Nous présenterons également quelques expérimentations numériques.

[1] J. F. Bonnans, G. Bonnet, J.-M. Mirebeau. *A linear finite-difference scheme for approximating Randers distances on Cartesian grids.* HAL preprint, 2021. https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03125879.

[2] K. Crane, C. Weischedel, M. Wardetzky. *Geodesics in heat : A new approach to computing distance based on heat flow.* ACM Transactions on Graphics, **32(5)**, 152 :1–152 :11, 2013.

[3] J. Solomon, F. de Goes, G. Peyré et al. *Convolutional Wasserstein distances : Efficient optimal transportation on geometric domains.* ACM Transactions on Graphics, **34(4)**, 66 :1–66 :11, 2015.

Contact : `guillaume.bonnet1@universite-paris-saclay.fr`