Noyau reproduisant LQ et espaces de trajectoires contrôlées en contrôle optimal Linéaire-Quadratique (à contraintes d'état)

Pierre-Cyril AUBIN-FRANKOWSKI, CAS, MINES ParisTech - Paris

Où l'apprentissage se niche-t-il en contrôle optimal ? Nous montrons dans cet exposé que les espaces de trajectoires contrôlées linéairement sont des espaces de Hilbert à noyau reproduisant à valeurs vectorielles lorsqu'ils s'ont munis du produit scalaire correspondant au coût quadratique. Le *noyau LQ* associé est lié à l'inverse de la matrice de Riccati [1] et au Gramien de contrôlabilité [2]. Ce noyau permet de traiter par un simple *théorème de représentation* du cas difficile des contraintes d'état, dans le cas affine pour des problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique (LQ) à temps variant [2]. Numériquement, ceci permet une résolution exacte en temps continu des problèmes de planification de trajectoires. Nous exposerons en conséquence un lien nouveau entre méthodes à noyaux et contrôle optimal.

Plus précisément, nous introduisons l'espace vectoriel des trajectoires contrôlées linéairement

$$\mathcal{S}_{[t_0,T]} := \left\{ \mathbf{x} : [t_0,T] \to \mathbb{R}^Q \mid \exists\, \mathbf{u}(\cdot) \text{ s.t. } \mathbf{x}'(t) \overset{p.p}{=} \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t),\ \int_{t_0}^{T} \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)dt < \infty \right\}$$

et identifions dans la formulation du problème de contrôle sa norme quadratique naturelle $\|\mathbf{x}(\cdot)\|_K^2$

$$\min_{\mathbf{x}(\cdot)\in\mathcal{S}_{[t_0,T]}} \quad g((\mathbf{x}(t_i))_{i\in\{1,\dots,N_0\}}) + \underbrace{\mathbf{x}(t_T)^\top \mathbf{J}_T \mathbf{x}(t_T) + \int_{t_0}^{T} \left[\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)\right] dt}_{=:\|\mathbf{x}(\cdot)\|_K^2} \qquad (\mathcal{P}_{\mathrm{LQ}})$$

Théorème 1. *[1] Si $\mathbf{A}(\cdot) \in L^1(t_0,T)$, $\mathbf{B}(\cdot) \in L^2(t_0,T)$, et $\mathbf{Q}(\cdot) \in L^1(t_0,T)$ et $\mathbf{R}(\cdot) \in L^2(t_0,T)$ sont semi-définies positives, avec $\mathbf{R}(\cdot) \geq r\,\mathrm{Id}_P$ p.p. pour un $r > 0$, et $\mathbf{J}_T$ définie positive, alors $(\mathcal{S}_{[t_0,T]}, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant à valeurs vectorielles sur $[t_0,T]$ de noyau $K_{[t_0,T]}(\cdot,\cdot)$ uniformément continu. De plus, pour $g(\cdot) \equiv 0$, $K_{[t_0,T]}(t_0,t_0) = \mathbf{J}(t_0,T)^{-1}$, où $J(t_0,T)$ est la matrice de Riccati associée à $(\mathcal{P}_{\mathrm{LQ}})$.*

Par le principe du maximum de Pontryagine (PMP), on dispose dans le cas non-contraint d'une boucle de rétroaction fermée, cependant la trajectoire optimale $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ doit être obtenue par des approximations numériques de la dynamique. À l'inverse, le noyau $K_{[t_0,T]}$ effectue l'intégration du système hamiltonien et code de manière parcimonieuse $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ sur $[t_0,T]$. Contrairement au PMP, le vecteur adjoint $\mathbf{p}(t)$ disparaît dans la perspective des méthodes à noyaux et seule la condition initiale (ou certains points de rendez-vous intermédiaires) induit un covecteur $\mathbf{p}_i$. Ce résultat a été exploité dans [2] pour traiter les contraintes d'état affines. Cette approche pour traiter de contraintes sur des fonctions s'appuie sur une méthode générique par recouvrement de compact en dimension infinie [4], étendue dans [3].

[1] P.-C. Aubin-Frankowski. *Interpreting the dual Riccati equation through the LQ reproducing kernel.* Comptes Rendus. Mathématique, **359(2)**, 199–204, 2021.

[2] P.-C. Aubin-Frankowski. *Linearly-constrained Linear Quadratic Regulator from the viewpoint of kernel methods.* SIAM Journal on Control and Optimization, 2021. (to appear, `https://arxiv.org/abs/2011.02196`).

[3] P.-C. Aubin-Frankowski, Z. Szabó. *Handling hard affine SDP shape constraints in RKHSs.* Tech. rep., 2020. (`https://arxiv.org/abs/2101.01519`).

[4] P.-C. Aubin-Frankowski, Z. Szabó. *Hard Shape-Constrained Kernel Machines.* In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2020. (`http://arxiv.org/abs/2005.12636`).

Contact : `pierre-cyril.aubin@mines-paristech.fr`