DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Schémas implicites semi-lagrangiens pour la dynamique des gaz compressibles en dimension 1

SMAI | Alexiane PLESSIER, Stéphane DEL PINO, Bruno DESPRÉS | Juin 2021

Plan

- Modéliser et simuler les interactions fluide-structure. Par exemple la résistance d'un pont face au vent, la circulation sanguine dans les artères, la portance d'un avion...
- En dynamique rapide, on représente la partie fluide compressible à l'aide des équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) = 0. \end{cases}$$

- En dynamique des chocs, on utilise principalement des schémas explicites, soumis à une CFL.

$$\text{CFL} : c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1.$$

- CFL dans le cas d'une structure solide fine

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x \to 0\\ \text{vitesse du son } c \gg 1\end{array}\right\} \implies \Delta t \text{ très petit.}$$

Stratégie générale :

- Développer un schéma implicite Lagrangien pour la partie fluide [1]
- Généraliser le schéma au cas des structures élasto-plastique fines [7], [8]
- Coupler le schéma implicite pour la partie solide élastique avec le schéma fluide (explicite et/ou implicite)

Focus de la présentation :

- Utiliser un formalisme Lagrangien (*i.e.* le maillage se déforme selon le fluide)
- Développer un schéma implicite volumes finis, stable au sens de l'entropie

. [1] C.Marmignon, C. Chalons, F. Coquel. Time Implicit Approximation of the Multipressure Gas Dynamics Equations in Several Time Space Dimensions. SIAM, 48 :1678-106, 2010.

. [7] G. Kluth, B. Després. Discretization of Hyperelasticity on Unstructured Mesh with a Cell-centered Lagrangian Scheme. Journal of Computational Physics, 2010.

. [8] P.-H. Maire, R. Abgrall, J. Breil, R. Loubère, B. Rebourcet. A Nominally Sceond-Order Cell-Centered Lagrangian Scheme for SImulating Elastic-Plastic Flows on Two-Dimensional Unstructured Grids. Journal Of Computational Physics, 2013

- Eulérien :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) = 0. \end{cases} \quad + \quad \begin{array}{c} \text{entropie} \\ \\ \partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho S u) \geqslant 0. \end{array}$$

- Lagrangien : $D_t := \partial_t + u\partial_x$ où u est la vitesse du fluide.

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho D_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \rho D_t u + \partial_x p = 0, \\ \rho D_t E + \partial_x(pu) = 0. \end{cases} \quad + \quad \begin{array}{c} \text{entropie} \\ \\ \rho D_t S \geqslant 0. \end{array}$$

Méthode :

- Phase de prédiction : schéma implicite Lagrangien pour les équations d'Euler isentropiques [1]

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho D_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \rho D_t u + \partial_x p = 0, \\ \rho D_t S = 0. \end{cases} \qquad + \qquad \begin{array}{c} \text{entropie} \\ \\ \rho D_t E + \partial_x (pu) \leqslant 0. \end{array}$$

- Phase de correction : retour aux équations d'Euler (1), conservation de l'énergie totale E restaurée, et inégalité d'entropie sur S

. [1] C.Marmignon, C. Chalons, F. Coquel. Time Implicit Approximation of the Multipressure Gas Dynamics Equations in Several Time Space Dimensions. SIAM, 48 :1678-106, 2010.

- Adaptation du schéma Eulérien relaxé de [1]

$$\begin{cases} \overline{\tau_j} = \tau_j^n + \nu_j(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ \overline{u_j} = u_j^n + \nu_j(\overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}}), \\ \overline{\Pi_j} = \Pi_j^n - \nu_j a^2(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}) \\ \qquad + \nu_j \lambda \rho_j^n (p_j^n - \overline{\Pi_j}), \\ \overline{S_j} = S_j^n. \end{cases}$$

$$\overline{\Pi_j} - \overline{\Pi_{j+\frac{1}{2}}} = (\rho c)_j^n(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),\ \overline{\Pi_j} - \overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}} = (\rho c)_j^n(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

- Analyse théorique incomplète (inégalité d'entropie [9])
- Constatation que Δt ne peut pas être pris très grand

. [1] C.Marmignon, C. Chalons, F. Coquel. Time Implicit Approximation of the Multipressure Gas Dynamics Equations in Several Time Space Dimensions. SIAM, 48 :1678-106, 2010.

. [9] N. Seguin, F. Coquel, E. Godlewski. Approximation par relaxation de systèmes hyperboliques, Séminaire d'analyse appliquée, 2008

- Linéarisation de τ ($c^2 = -\frac{1}{\rho^2}\partial_\tau p$) [4]

$$\begin{cases} \overline{p_j} = p_j^n - \dfrac{\nu_j}{(\rho_j^n c_j^n)^2}(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ \overline{u_j} = u_j^n + \nu_j(\overline{p_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}}), \\ \overline{S_j} = S_j^n \end{cases}$$

$$\overline{p_j} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}} = \alpha^n_{j+\frac{1}{2}}(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),\ \overline{p_j} - \overline{p_{j-\frac{1}{2}}} = \alpha^n_{j-\frac{1}{2}}(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

- Incapable de prouver la stabilité entropique
- Observation de la non stabilité pour les grands pas de temps

. [4] B. Després, Numerical Methods for Eulerian and Lagrangian Conservation Laws, Birkhäuser Basel, 2017

- Conserver la structure de (2)

$$\begin{cases} \overline{\tau_j} = \tau_j^n + \nu_j(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ \overline{u_j} = u_j^n + \nu_j(\overline{p_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}}), \\ \overline{S_j} = S_j^n. \end{cases}$$

$$\overline{p_j} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),\ \overline{p_j} - \overline{p_{j-\frac{1}{2}}} = \alpha_{j-\frac{1}{2}}^n(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

- Analyse théorique, et preuve de l'existence et de l'unicité (schéma bien défini)
- Stabilité inconditionnelle (selon les conditions au bord)

- Restaurer la conservation de l'énergie totale E

Schéma relaxé

$$\begin{cases} \tau_j^{n+1} = \tau_j^n + \nu_j(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ u_j^{n+1} = u_j^n + \nu_j(\overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{\Pi_{j+\frac{1}{2}}}), \\ E_j^{n+1} = E_j^n - \nu_j(\overline{\Pi_{j+\frac{1}{2}}}\,\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}}\,\overline{u_{j-\frac{1}{2}}}) \end{cases}$$

$$\overline{\Pi_j} - \overline{\Pi_{j+\frac{1}{2}}} = (\rho c)_j^n(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),$$
$$\overline{\Pi_j} - \overline{\Pi_{j-\frac{1}{2}}} = (\rho c)_j^n(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

Schéma linéarisé et non linéaire

$$\begin{cases} \tau_j^{n+1} = \tau_j^n + \nu_j(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ u_j^{n+1} = u_j^n + \nu_j(\overline{p_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}}), \\ E_j^{n+1} = E_j^n - \nu_j(\overline{p_{j+\frac{1}{2}}}\ \overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{p_{j-\frac{1}{2}}}\ \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}) \end{cases}$$

$$\overline{p_j} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),$$
$$\overline{p_j} - \overline{p_{j-\frac{1}{2}}} = \alpha_{j-\frac{1}{2}}^n(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

Pour tout $j \in \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est un maillage contenant N cellules, on a

$$\begin{cases} \overline{\tau_j} = \tau_j^n + \nu_j(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}), \\ \overline{u_j} = u_j^n + \nu_j(\overline{p_{j-\frac{1}{2}}} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}}), \\ \overline{S_j} = S_j^n. \end{cases}$$

$$\overline{p_j} - \overline{p_{j+\frac{1}{2}}} = \alpha^n_{j+\frac{1}{2}}(\overline{u_{j+\frac{1}{2}}} - \overline{u_j}),\ \overline{p_j} - \overline{p_{j-\frac{1}{2}}} = \alpha^n_{j-\frac{1}{2}}(\overline{u_j} - \overline{u_{j-\frac{1}{2}}}).$$

$$\begin{aligned} \frac{2M_j}{\Delta t}(\overline{\tau_j} - \tau_j^n) + \frac{1}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}}(\overline{p_{j+1}} - \overline{p_j}) + \frac{1}{\alpha_{j-\frac{1}{2}}}(\overline{p_{j-1}} - \overline{p_j}) \quad &= \quad \overline{u_{j+1}} - \overline{u_{j-1}}, \\ \frac{2M_j}{\Delta t}(\overline{u_j} - u_j^n) + \alpha_{j+\frac{1}{2}}(\overline{u_j} - \overline{u_{j+1}}) + \alpha_{j-\frac{1}{2}}(\overline{u_j} - \overline{u_{j-1}}) \quad &= \quad \overline{p_{j-1}} - \overline{p_{j+1}}. \\ \nabla J(U) \quad &= \quad AU \end{aligned}$$

$$J :]-\infty, 0[^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ U = ((-\overline{p_j})_{j\in\mathcal{M}}, (\overline{u_j})_{j\in\mathcal{M}}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ A \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}.$$

On peut mettre la phase de prédiction du schéma 3 sous la forme

$$\nabla J(U) = AU,$$

- (H1) Le domaine est $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. C'est un domaine ouvert convexe : $\mathcal{D} =]-\infty, 0[^n \times \mathbb{R}^m$, où $n > 0$ et $m \geqslant 0$ sont deux entiers. Son bord est $\partial\mathcal{D} = \{V \in \mathbb{R}^{n+m} : \exists\, j^* \in \{1, \dots, n\}\ V_{j^*} = 0, \forall j \neq j^* \in \{1, \dots, n\},\ V_j \leqslant 0\}$.
- (H2) La fonction $J : U \in \mathcal{D} \to J(U) \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$, strictement convexe et coercive. De plus, pour tout $V \in \partial\mathcal{D}$ il existe une direction unitaire sortante $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n+m}$ telle que $(\nabla J(V - \varepsilon \boldsymbol{d}), \boldsymbol{d}) \xrightarrow[V - \varepsilon \boldsymbol{d} \in \mathcal{D}]{\varepsilon \to 0^+} +\infty$. Également, pour tout $V \in \partial\mathcal{D}$, on a $||\nabla J(W)|| \xrightarrow[W \in \mathcal{D}]{W \to V} +\infty$.
- (H3) La matrice $A \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ est anti-symétrique et satisfait $\ker(A) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Théorème

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \text{ dans } \mathcal{D} \text{ tel que} \\ \nabla J(U) = AU. \end{cases}$$

possède une unique solution.

- Démontrer l'unicité,
- Démontrer l'existence dans le cas où $A = 0$, chercher le minimum de J
- Comme J est strictement convexe, utiliser le cadre de l'analyse convexe [5], [6],
- Finir la preuve de l'existence en utilisant des résultats sur les équations différentielles ordinaires [2], [3].

. [5] J.-B. Hirriart-Urruty, Optimisation et Analyse Convexe, EDP Sciences, 1998.
. [6] J.-B. Hirriart-Urruty, C. Lemaréchal, Fundamentals of Convex Analysis,Springer-Verlag, 2004.
. [2] E. Coddington, N. Levinson,Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw-Hill Education, 1955.
. [3] J.-P. Demailly, Analyse Numérique et Équations Différentielles - $4^{ème}$ *Ed*, *EDPSciences*, 2016.

$$\nabla J(U) = AU$$

$$J : \ ]-\infty, 0[^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ U = ((-\overline{p_j})_{j\in\mathcal{M}}, (\overline{u_j})_{j\in\mathcal{M}}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ A \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}.$$

$$J(U) = \sum_{j=1}^{N} \frac{2M_j}{\Delta t}\left[-C_j\overline{p_j}^{1-\frac{1}{\gamma}} + \tau_j^n\overline{p_j} - u_j^n\overline{u_j} + \frac{\overline{u_j}^2}{2}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}}\frac{(\overline{p_{j+1}} - \overline{p_j})^2}{2} + \alpha_{j+\frac{1}{2}}\frac{(\overline{u_j} - \overline{u_{j+1}})^2}{2},$$

avec $C_j = \gamma(\gamma-1)^{-1+\frac{1}{\gamma}} \exp\left(\frac{S_j}{C_v}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ (gaz parfaits).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B & 0 \end{array}\right] \text{avec } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriétés du schéma 3 (prédiction non linéaire)

Phase de prédiction :

- Le schéma est conservatif (masse, impulsion, entropie)

$$\overline{S_j} = S_j^n.$$

- Il existe une unique solution $\big((\overline{\tau}_j)_{j\in\mathcal{M}},\quad (\overline{u}_j)_{j\in\mathcal{M}},\quad (\overline{S}_j)_{j\in\mathcal{M}}\big)$.
- Le schéma satisfait une inégalité d'entropie non triviale

$$\frac{\overline{E_j} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{(\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta m} \leqslant 0,$$

$$(\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} = \overline{p_{j+\frac{1}{2}}}\;\overline{u_{j+\frac{1}{2}}}.$$

Phase de correction :

- Le schéma est conservatif (masse, impulsion, énergie totale)

$$\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{(\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta m} = 0,$$

- Le schéma satisfait la croissance de l'entropie physique S.

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} \geqslant 0.$$

- Phase de prédiction : $r^n := \frac{\overline{E}_j - E_j^n}{\Delta t} + \frac{(\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta m} \leqslant 0,\ \ \overline{S}_j = S_j^n.$
- Phase de correction : $\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} = -\frac{((\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}})}{\Delta m}.$

$$\begin{aligned}
\frac{E_j^{n+1} - \overline{E}_j}{\Delta t} &= \frac{E_j^{n+1} - E_j^n + E_j^n - \overline{E}_j}{\Delta t} \\
&= -\frac{((\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}})}{\Delta m} - r^n + \frac{((\overline{pu})_{j+\frac{1}{2}} - (\overline{pu})_{j-\frac{1}{2}})}{\Delta m} \\
&= -r^n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

- Comme $u^{n+1} = \overline{u}$ et $de = dE - udu$, alors

$$\frac{e_j^{n+1} - \overline{e}_j}{\Delta t} = -r^n \geqslant 0.$$

- On évalue la variation de S

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \frac{S_j^{n+1} - \overline{S}_j}{\Delta t} + \frac{\overline{S}_j - S_j^n}{\Delta t} = \frac{S_j^{n+1} - \overline{S}_j}{\Delta t}.$$

D'après la relation de Gibbs $TdS = de + pd\tau$, or $\tau^{n+1} = \overline{\tau}$, donc $S(e, \rho) = S(e)$ et on trouve

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \frac{S(e_j^{n+1}, \overline{\rho}_j) - S(\overline{e}_j, \overline{\rho}_j)}{\Delta t} \geqslant 0.$$

Schémas :

- explicite : Solveur acoustique lagrangien
- implicite : Schéma 1 (prédiction relaxée)
  Schéma 2 (prédiction linéarisée)
  Schéma 3 (prédiction non linéaire)

Comparaisons :

- précision, avec le même pas de temps pour les 4 schémas,
- robustesse, avec des pas de temps de plus en plus grands en implicite.
- différentes conditions au bord

Cas test :

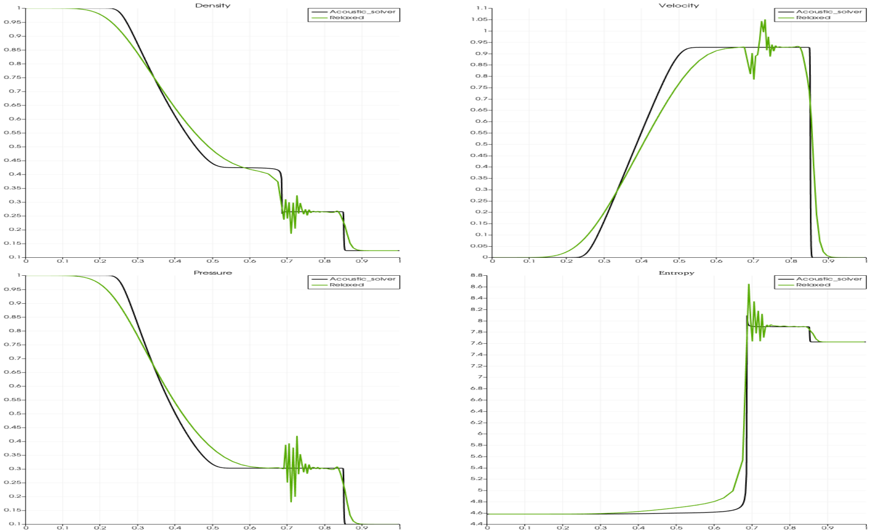
- Tube à choc de Sod
- Tube à choc de Sod avec rebond
- Autres

- Conditions initiales

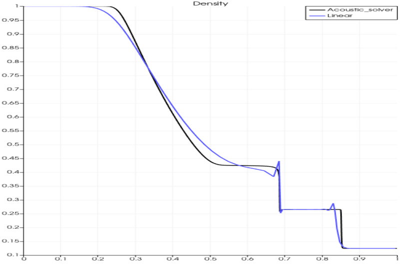
$$p_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0.5 \\ 0.1 & x \geqslant 0.5 \end{cases}, \quad \rho_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0.5 \\ 0.125 & x \geqslant 0.5 \end{cases}, \quad u_0(x) = 0.$$

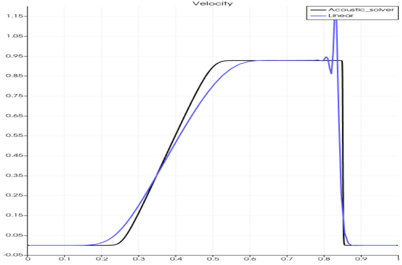
- Conditions au bord
  - vitesse : $u_{left} = 0, \qquad u_{right} = 0.$
  - pression : $p_{left} = 1, \qquad p_{right} = 0.1.$
  - mixtes : $u_{left} = 0, \qquad p_{right} = 0.1.$
- Temps final : 0.2, $\quad \gamma = 1.4$

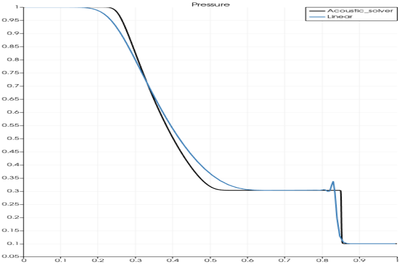
Maillage de 100 mailles, CFL=1.31.

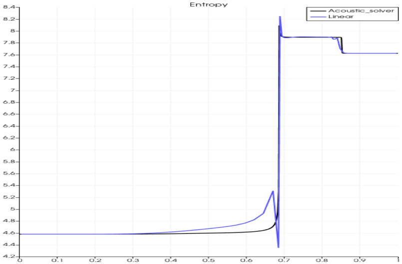


Maillage de 100 mailles, CFL= 1.52.



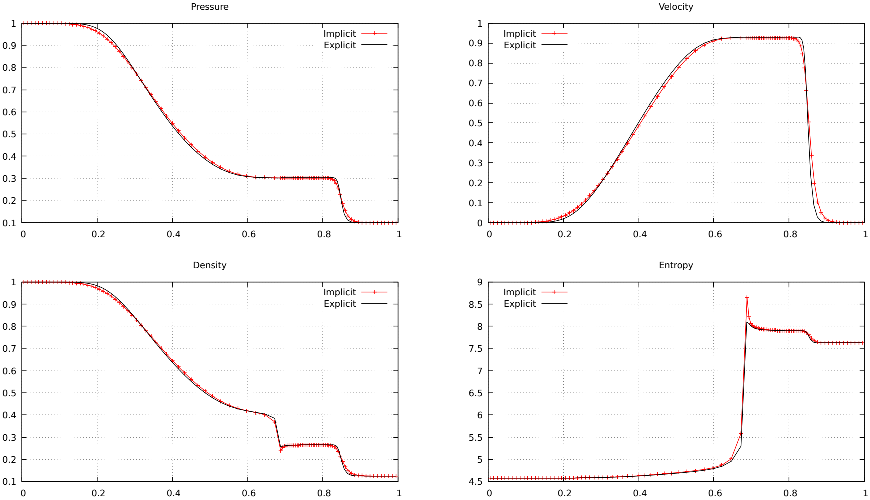




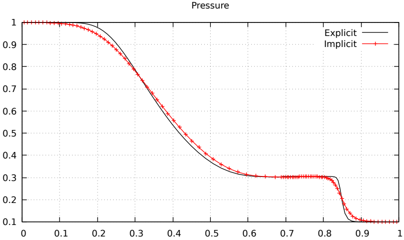


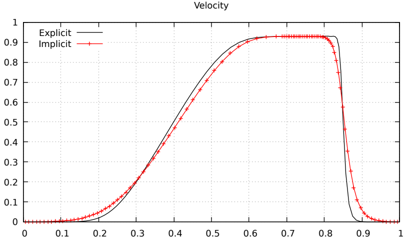
Crash pour CFL = 1.6.

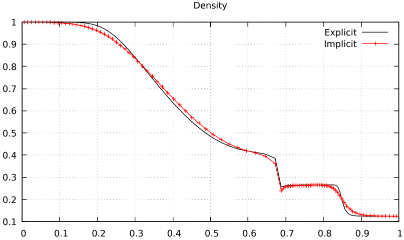
100 cells, for a same CFL=0.4 ($dt = 1.49\ 10^{-3}$).

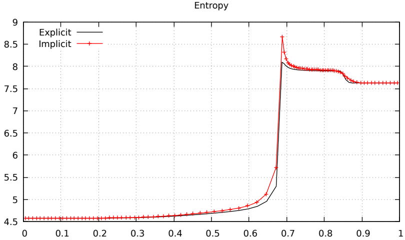


Maillage de 100 mailles, CFL=4.
Newton : 3 - 5 itérations

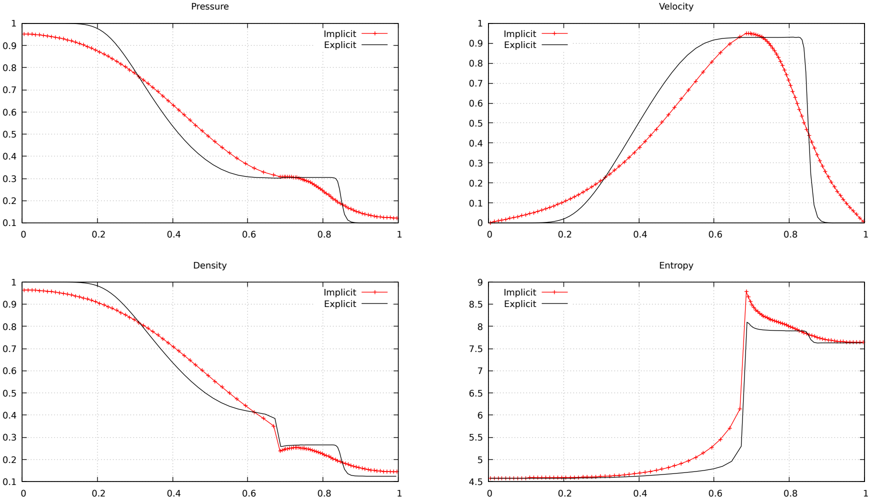




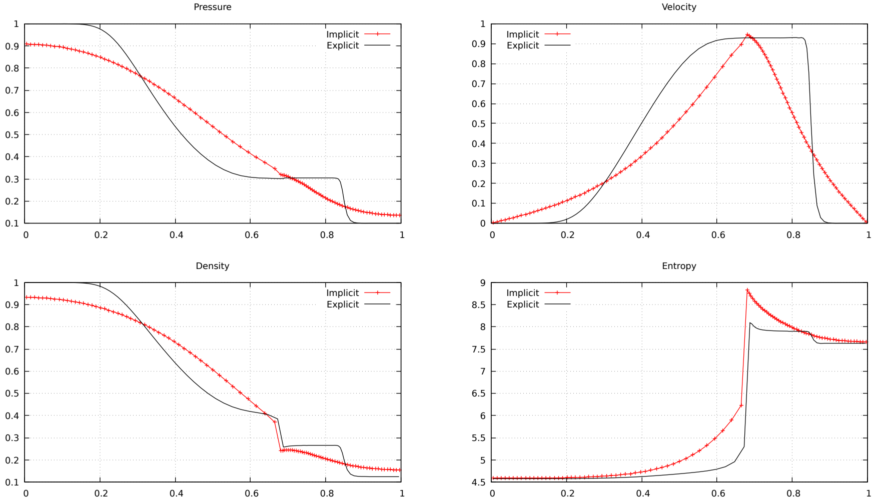




Maillage de 100 mailles, CFL=40.
Newton : 4 - 5 itérations

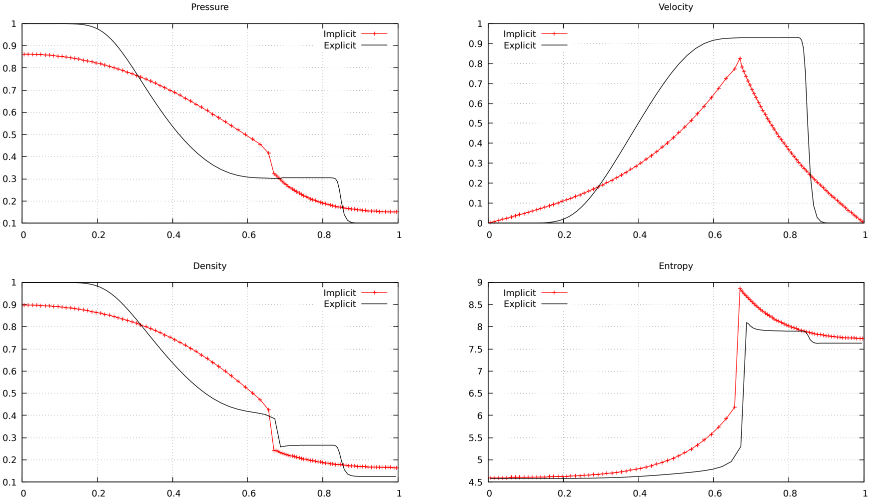


Maillage de 100 mailles, CFL=80.
Newton : 4 - 6 itérations



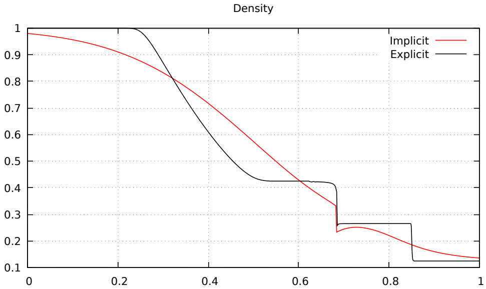
On observe un positionnement parfait de la discontinuité de contact.

Maillage de 100 mailles, $CFL_{\text{max}} = 537$, un seul pas de temps.
Newton : 6 itérations



Robustesse inconditionnelle.

Maillage de 9000 mailles sur le domaine $[-4, 5]$, $CFL_{max} = 537$.



Une explication vient de l'analyse du schéma implicite Lagrangien du problème de Riemann.

- Stratégie de schéma prédiction-correction basé sur [1]
- Définition d'un cadre abstrait pour l'analyse de certains schémas implicites
- Preuve de l'existence et l'unicité d'une solution pour le schéma non linéaire de prédiction
- Implémentation et tests sur le schéma implicite pour Euler
- Tests de précision et de robustesse comparés au solveur acoustique explicite [4]
- Article bientôt disponible

Perspectives :

- Passer à un flux à deux états
- Étendre au cas multi-D
- Expliquer la convergence rapide du Newton, et la pression qui reste positive
- Essayer de démontrer la croissance de l'entropie grâce à la formulation $\nabla J(U) = AU$ et à l'analyse convexe

. [1] C.Marmignon, C. Chalons, F. Coquel. Time Implicit Approximation of the Multipressure Gas Dynamics Equations in Several Time Space Dimensions. SIAM, 48 :1678-106, 2010.

. [4] B. Després, Numerical Methods for Eulerian and Lagrangian Conservation Laws, Birkhäuser Basel, 2017

Chalons, C., Coquel, F., and Marmignon, C.
Time-Implicit Approximation of the Multipressure Gas Dynamics Equations in Several Space Dimensions.
SIAM, 48 :1678–1706, 2010.

Coddington, E. and Levinson, N.
Theory of Ordinary Differential Equations.
Tata McGraw-Hill Education, 1955.

Demailly, J.-P.
Analyse Numérique et Equations Différentielles-4ème Ed.
EDP sciences, 2016.

Després, B.
Numerical Methods for Eulerian and Lagrangian Conservation Laws.
Birkhäuser Basel, 2017.

Hirriart-Urruty, J.-B.
Optimisation et Analyse Convexe.
EDP Sciences, 1998.

Hirriart-Urruty, J.-B. and Lemaréchal, C.
Fundamentals of Convex Analysis.
Springer-Verlag, 2004.

Kluth, G. and Després, B.
Discretization of hyperelasticity on unstructured mesh with a cell-centered Lagrangian scheme.
Journal of Computational Physics, 229(24) :9092–9118, 2010.

Maire, P-H., Abgrall, R., Breil, J., Loubère, R., and Rebourcet, B.
A nominally sceond-order cell-centered Lagrangian scheme for simulating elastic-plastic flows on two-dimensional unstructured grids.
Journal Of Computational Physics, 235 :626–665, 2013.

Seguin, N., Coquel, F., and Godlewski, E.
Approximation par relaxation de systèmes hyperboliques.