

Sur un problème d'évolution généralisé

Alexandre Thorel

En collaboration avec R. Labbas et S. Maingot

SMAI, La Grande Motte, Juin 2021

Plan de l'exposé

1 Introduction

Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}
 - Inversibilité de l'opérateur
 - Étude de l'ensemble résolvant
 - Estimation de la résolvante
- 3 Les résultats de génération de semi-groupes

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}
 - Inversibilité de l'opérateur
 - Étude de l'ensemble résolvant
 - Estimation de la résolvante
- 3 Les résultats de génération de semi-groupes
- 4 Perspectives

Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

3 Les résultats de génération de semi-groupes

4 Perspectives

1. Introduction

On étudie une classe de problèmes en dynamique de population, structurés **en temps et en espace**. Cette dynamique décrit les variations dans le temps de la densité spatiale de population $u(t, x, y)$ dans un domaine Ω cylindrique de la forme

$$\Omega = (a, b) \times \omega \subset \mathbb{R}^n,$$

où $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^{n-1} .

Cette population peut être de nature variée :

- poussières (amiante, polluants, ...),
- cellules,
- insectes (abeilles, mouches, carpocapses, ...),
- animaux, etc...

1. Introduction

Soit $T > 0$, sur $]0, T[\times \Omega$, on s'intéresse au modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y)}_{\text{taux de variation dans le temps}} = \underbrace{k\Delta u(t, x, y)}_{\text{diffusion locale}} - \underbrace{\Delta^2 u(t, x, y)}_{\text{diffusion à longue portée}} + \underbrace{G(u(t, x, y))}_{\text{terme de croissance logistique}} \\ u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad x, y \in \Omega \\ u(t, x, \zeta) = \Delta u(t, x, \zeta) = 0, \quad t \in [0, T], (x, \zeta) \in]a, b[\times \partial\omega \\ u(t, a, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, a, y) = 0, \quad t \in [0, T], y \in \omega \\ u(t, b, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, b, y) = 0, \quad t \in [0, T], y \in \omega, \end{array} \right.$$

où

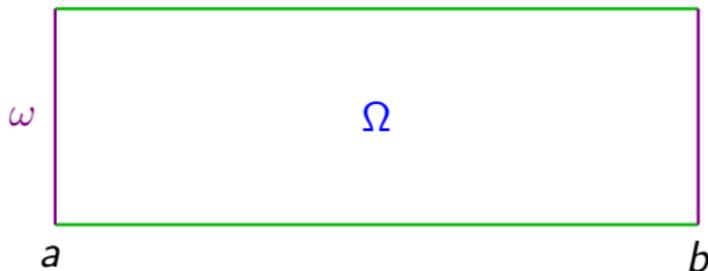
- $\Omega =]a, b[\times \omega$ est un ouvert borné de \mathbb{R}^n ,
- $k \in]-C_\omega, +\infty[$, où C_ω est la constante de Poincaré.

1. Introduction

Pour cela, on considère le problème linéaire stationnaire associé :

$$(P_{edp}) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta^2 u(x, y) + k\Delta u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ u(x, \zeta) = \Delta u(x, \zeta) = 0, \quad x \in]a, b[, \zeta \in \partial\omega \\ u(a, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0, \quad y \in \omega \\ u(b, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = 0, \quad y \in \omega, \end{array} \right.$$

où $g \in L^p(\Omega)$, avec $p \in]1, +\infty[$ et Ω est schématisé par :



1. Introduction : la méthode

Puisque $\Omega =]a, b[\times \omega$ est cylindrique, on fait une séparation des variables.
On note

$$(u(x))(y) := u(x, y) \quad \text{et} \quad X := L^p(\omega), \quad p \in]1, +\infty[.$$

On définit alors

$$\begin{cases} D(A_0) := \{\varphi \in W^{2,p}(\omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ A_0\varphi := \Delta_y \varphi, \quad \varphi \in D(A_0). \end{cases}$$

Ainsi, le problème (P_{edp}) devient :

$$(P_0) \begin{cases} -u^{(4)}(x) - (2A_0 - kl)u''(x) - (A_0^2 - kA_0)u(x) = g(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = u'(a) = 0, \\ u(b) = u'(b) = 0, \end{cases}$$

où $g \in L^p(a, b; L^p(\omega))$, $p \in]1, +\infty[$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $k > -C_\omega$.

1. Introduction : les hypothèses

On s'intéresse à l'équation

$$-u^{(4)}(x) - (2A - kI)u''(x) - (A^2 - kA)u(x) = g(x), \quad x \in]a, b[, \quad (1)$$

avec les mêmes conditions aux limites, où A est un opérateur linéaire fermé sur X avec les hypothèses :

Hypothèses :

(\mathcal{H}_1) X est un espace de Banach complexe UMD,

(\mathcal{H}_2) $0 \in \rho(A)$,

(\mathcal{H}_3) $-A \in \text{BIP}(X, \theta)$ avec $\theta \in [0, \pi/2[$,

(\mathcal{H}_4) $[k, +\infty[\subset \rho(A)$.

On cherche alors une solution classique de (1), c'est-à-dire :

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a, b; D(A)).$$

1. Introduction : la logique de l'étude

On va donc s'intéresser à l'étude spectrale de l'opérateur linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} u \in W^{4,p}(a, b; L^p(\omega)) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \text{ et} \\ u'' \in L^p(a, b; D(A)) : \\ u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \end{array} \right\} \\ [\mathcal{A}u](x) = -u^{(4)}(x) - (2A - kl)u''(x) - (A^2 - kA)u(x), \end{array} \right.$$

pour $u \in D(\mathcal{A})$ et $x \in (a, b)$.

On cherche alors à :

- résoudre l'équation

$$(-\mathcal{A} - \lambda I) u = f,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in L^p(a, b; X)$, $p \in (1, +\infty)$,

- estimer la norme de la solution telle que :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \|f\|_{L^p(a,b;X)}.$$

Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

3 Les résultats de génération de semi-groupes

4 Perspectives

Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

3 Les résultats de génération de semi-groupes

4 Perspectives

2.1 Un problème plus général

Afin d'étudier les propriétés spectrales dans la section suivante, on considère le problème plus général

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), & x \in]a, b[, \\ u(a) = \varphi_1, \quad u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, \quad u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (2)$$

où P et Q sont des opérateurs linéaires vérifiant

(H_1) X est un espace de Banach complexe UMD,

(H_2) P et Q sont fermés et $0 \in \rho(P) \cap \rho(Q)$,

(H_3) $D(P) = D(Q)$ et $P^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$,

(H_4) $-P, -Q \in \text{BIP}(X, \theta_0)$, pour un $\theta_0 \in [0, \pi[$,

(H_5) $P - Q$ admet un prolongement inversible $B \in \mathcal{L}(X)$.

2.1. Solution particulière

Théorème

Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vraies. Alors, il existe une unique solution classique F de

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, u(b) = 0, u''(a) = 0, u''(b) = 0. \end{cases}$$

2.1. Solution particulière

Théorème

Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vraies. Alors, il existe une unique solution classique F de

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, u(b) = 0, u''(a) = 0, u''(b) = 0. \end{cases}$$

Idées de la preuve :

On résout, le problème du second ordre

$$\begin{cases} u''(x) - Pu(x) = v(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, u(b) = 0, \end{cases}$$

où le second membre est l'unique solution classique de

$$\begin{cases} v''(x) - Qv(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ v(a) = 0, v(b) = 0. \end{cases}$$

□

2.1. Formule de représentation

Proposition

Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vraies. Si u est une solution classique de (1), alors il existe $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que pour tout $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F(x), \quad (3)$$

où $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ et F est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.

2.1. Formule de représentation

Proposition

Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vraies. Si u est une solution classique de (1), alors il existe $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que pour tout $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F(x), \quad (3)$$

où $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ et F est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.

Idées de la preuve :

Si u est une solution classique de (1), alors $u_h := u - F$ vérifie

$$u_h^{(4)}(x) + (P + Q)u_h''(x) + PQ u_h(x) = 0.$$

2.1. Formule de représentation

Proposition

Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vraies. Si u est une solution classique de (1), alors il existe $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que pour tout $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F(x), \quad (3)$$

où $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ et F est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.

Idées de la preuve :

Si u est une solution classique de (1), alors $u_h := u - F$ vérifie

$$u_h^{(4)}(x) + (P + Q)u_h''(x) + PQ u_h(x) = 0.$$

On généralise la méthode de Krein en posant

$$v := r^{-1}L^2 u_h - r^{-1}u_h'' \quad \text{et} \quad w := -r^{-1}M^2 u_h + r^{-1}u_h''.$$

2.1. Formule de représentation

On montre que v et w sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{array} \right.$$

où $x \in]a, b[$.

2.1. Formule de représentation

On montre que v et w sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{array} \right.$$

où $x \in]a, b[$.

On résout ces équations opérationnelles et pour $x \in]a, b[$, on obtient

$$v(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4.$$

2.1. Formule de représentation

On montre que v et w sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{array} \right.$$

où $x \in]a, b[$.

On résout ces équations opérationnelles et pour $x \in]a, b[$, on obtient

$$v(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4.$$

On conclut en notant que

$$v + w = r^{-1}(L^2 - M^2)u_h = u_h = u - F.$$

2.1 Résolution du problème

Théorème

Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) soient vraies et que les opérateurs suivants sont inversibles :

$$\begin{cases} U := I - e^{(b-a)(L+M)} - B^{-1} (L + M)^2 \left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L} \right) \\ V := I - e^{(b-a)(L+M)} + B^{-1} (L + M)^2 \left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L} \right). \end{cases}$$

Alors, il existe une unique solution classique de

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), & x \in]a, b[, \\ u(a) = \varphi_1, \quad u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, \quad u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (4)$$

si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

3 Les résultats de génération de semi-groupes

4 Perspectives

2.2 Étude de l'ensemble résolvant : la méthode

On va maintenant s'intéresser à l'équation spectrale

$$u^{(4)}(x) + (2A - kl)u''(x) + (A^2 - kA - \lambda l)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

muni des mêmes conditions aux bords que précédemment.

Soit $\lambda \in -\frac{k^2}{4} + (\mathbb{C} \setminus \overline{S_{2\theta_A}})$. On pose

$$P_\lambda = A - \frac{k}{2}l + i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}l} \quad \text{and} \quad Q_\lambda = A - \frac{k}{2}l - i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}l}.$$

Ainsi, l'équation spectrale précédente s'écrit

$$u^{(4)}(x) + (P_\lambda + Q_\lambda)u''(x) + P_\lambda Q_\lambda u(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Notons que si A vérifie les hypothèses (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) , (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}_4) , alors les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées aussi.

2.2 Étude de l'ensemble résolvant

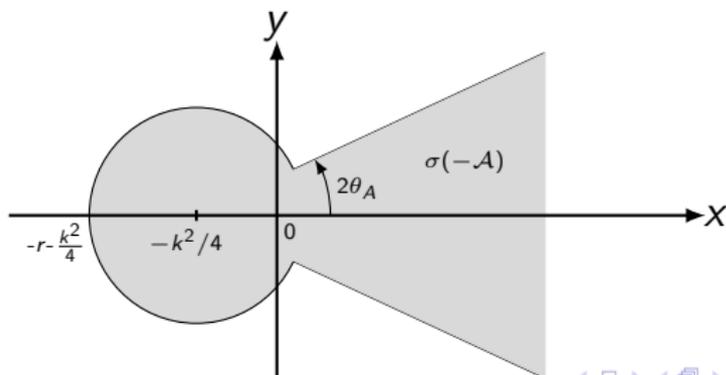
On note alors

$$L_\lambda = -\sqrt{-Q_\lambda}, \quad M_\lambda = -\sqrt{-P_\lambda} \quad \text{et} \quad B_\lambda = 2i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}}I \in \mathcal{L}(X).$$

Afin d'utiliser le Théorème d'existence et d'unicité de la section 2.1, il faut que

$$\begin{cases} U_\lambda := I - e^{(b-a)(L_\lambda + M_\lambda)} - B_\lambda^{-1} (L_\lambda + M_\lambda)^2 (e^{(b-a)M_\lambda} - e^{(b-a)L_\lambda}) \\ V_\lambda := I - e^{(b-a)(L_\lambda + M_\lambda)} + B_\lambda^{-1} (L_\lambda + M_\lambda)^2 (e^{(b-a)M_\lambda} - e^{(b-a)L_\lambda}), \end{cases}$$

soient inversibles. D'où $\lambda \in -\frac{k^2}{4} + \left(\mathbb{C} \setminus \left(\overline{B(0, r)} \cup \overline{S_{2\theta_A}}\right)\right)$, avec $r > 0$.



Plan de l'exposé

1 Introduction

2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}

- Inversibilité de l'opérateur
- Étude de l'ensemble résolvant
- Estimation de la résolvante

3 Les résultats de génération de semi-groupes

4 Perspectives

2.3 Estimation de la résolvante

Lemme

Soit $f \in L^p(a, b; X)$. Supposons que (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) soient vraies. Alors, pour tout $\mu \in \overline{S_\varphi} \subset \rho(-A)$, $\varphi \in]0, \pi - \theta_A[$ et tout $x \in [a, b]$, on a

- 1 $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset \rho(\sqrt{A + \mu I})$, pour tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\|(\sqrt{A + \mu I})^{-1}\|}\right)$.
- 2 Il existe $M > 0$ (indépendant de μ et f) tel que

$$\left(\int_a^b \left\| \int_a^x e^{-(x-s)\sqrt{A+\mu I}} f(s) ds \right\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{M}{\sqrt{1+|\mu|}} \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

et

$$\left(\int_a^b \left\| \int_x^b e^{-(s-x)\sqrt{A+\mu I}} f(s) ds \right\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{M}{\sqrt{1+|\mu|}} \|f\|_{L^p(a,b;X)}.$$

2.3 Estimation de la résolvante

Lemme

Soit $f \in L^p(a, b; X)$. Supposons que (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) soient vraies. Alors, pour tout $\mu, \eta \in \overline{S_\varphi} \subset \rho(-A)$, $\varphi \in]0, \pi - \theta_A[$ et tout $x \in [a, b]$, il existe $C > 0$ (indépendant de η, μ et f), tel que

$$\textcircled{1} \left\| e^{-(\cdot-a)\sqrt{-A+\eta I}} \int_a^b e^{-(s-a)\sqrt{-A+\mu I}} f(s) ds \right\|_{L^p(a,b;X)} \leq \left(\frac{C}{\sqrt{1+|\mu|}} + \frac{C}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

$$\textcircled{2} \left\| e^{-(\cdot-a)\sqrt{-A+\eta I}} \int_a^b e^{-(b-s)\sqrt{-A+\mu I}} f(s) ds \right\|_{L^p(a,b;X)} \leq \left(\frac{C}{\sqrt{1+|\mu|}} + \frac{C}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}
 - Inversibilité de l'opérateur
 - Étude de l'ensemble résolvant
 - Estimation de la résolvante
- 3 Les résultats de génération de semi-groupes
- 4 Perspectives

3. Les résultats

Théorème

On suppose (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) , (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}_4) . Alors, on a

$$\begin{cases} -\mathcal{A} + \frac{k^2}{4}I + rI \in \text{Sect} \left(\frac{\pi}{2} \right), & \text{si } 2\theta_A \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \\ -\mathcal{A} + \frac{k^2}{4}I + rI \in \text{Sect} (2\theta_A), & \text{si } 2\theta_A \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right), \end{cases}$$

où $r > 0$ est assez grand. Il existe $r' > r$ et $\theta_0 > 0$, tels que

$$\begin{cases} -\mathcal{A} + \frac{k^2}{4}I + r'I \in \text{Sect} (2\theta_A), & \text{si } 2\theta_A \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \\ -\mathcal{A} + \frac{k^2}{4}I + r'I \in \text{Sect} (\theta_0), & \text{si } 2\theta_A = 0. \end{cases}$$

Si de plus, $\theta_A < \pi/4$, alors l'opérateur \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique fortement continue $(e^{t\mathcal{A}})_{t \geq 0}$.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 L'étude spectrale de l'opérateur \mathcal{A}
 - Inversibilité de l'opérateur
 - Étude de l'ensemble résolvant
 - Estimation de la résolvante
- 3 Les résultats de génération de semi-groupes
- 4 Perspectives

5. Perspectives

- Montrer que $-\mathcal{A} \in \text{BIP}(X, \theta)$, où $\theta \in]2\theta_A, \pi[$.
- Étudier le problème de Cauchy abstrait linéaire associé.
- Étudier le problème non linéaire.

Merci pour votre attention !