

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

# Discrétisation d'EDPs anisotropes sur grille cartésienne

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Jean-Marie Mirebeau

ENS Paris-Saclay, CNRS, University Paris-Saclay

June 21, 2021

Congrès SMAI 2021

En collaboration avec

Guillaume Bonnet, Frédéric Bonnans,  
François Desquilbet, Ludovic Métivier.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

Conclusion

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

Conclusion

Conclusion

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

# Anisotropie et équations aux dérivées partielles

Les EDPs, et leur résolution numérique, sont la fondation d'innombrables applications en prévision et contrôle de systèmes physiques, de méthodes d'imagerie, etc

## Anisotropie

### Origines

Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

# Anisotropie et équations aux dérivées partielles

Les EDPs, et leur résolution numérique, sont la fondation d'innombrables applications en prévision et contrôle de systèmes physiques, de méthodes d'imagerie, etc

L'anisotropie est l'existence de directions privilégiées, localement, dans un domaine. C'est un phénomène générique et omniprésent, dont les causes sont variées:

- ▶ **Micro-structure**, soit biologique, géologique, synthétique...

## Anisotropie

### Origines

Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et

Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

## Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

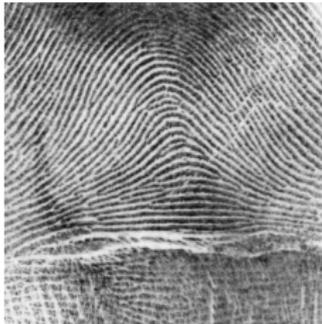


Figure: Empreinte digitale, minéral mica. Images wikipedia.

## Anisotropie et équations aux dérivées partielles

Les EDPs, et leur résolution numérique, sont la fondation d'innombrables applications en prévision et contrôle de systèmes physiques, de méthodes d'imagerie, etc

L'anisotropie est l'existence de directions privilégiées, localement, dans un domaine. C'est un phénomène générique et omniprésent, dont les causes sont variées:

- ▶ Micro-structure, soit biologique, géologique, synthétique...
- ▶ Nature différente des dimensions du domaine,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

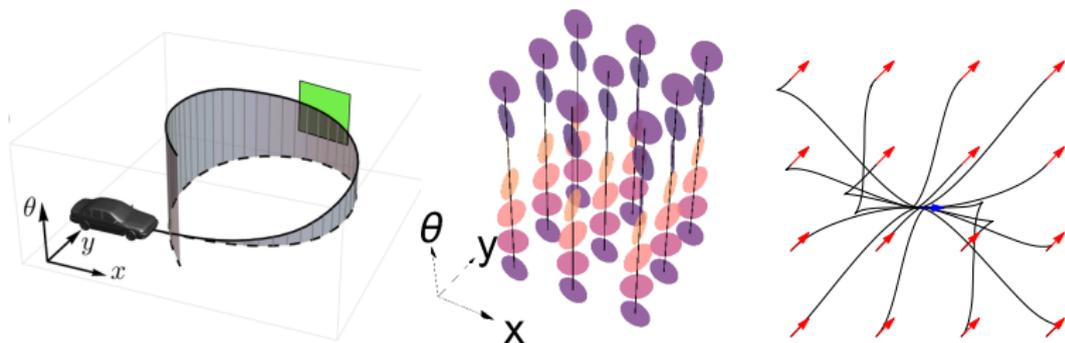


Figure: Véhicule de Reeds-Shepp

# Anisotropie et équations aux dérivées partielles

Les EDPs, et leur résolution numérique, sont la fondation d'innombrables applications en prévision et contrôle de systèmes physiques, de méthodes d'imagerie, etc

## Anisotropie

### Origines

Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et

Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

## Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

L'anisotropie est l'existence de directions privilégiées, localement, dans un domaine. C'est un phénomène générique et omniprésent, dont les causes sont variées:

- ▶ Micro-structure, soit biologique, géologique, synthétique...
- ▶ Nature différente des dimensions du domaine,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ .
- ▶ Proximité des **bords**, ou de **discontinuités** du milieu.

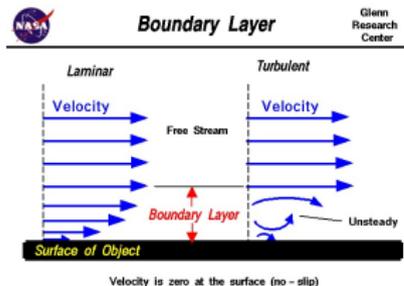


Figure: Effet de bord sur fluide, faille rocheuse. (Nasa, Britanica)

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines

**Discretisation**

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

### Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

### Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

## Conclusion

# Schémas aux différences finies

La discrétisation d'une EDP est préalable à sa résolution numérique.

## Anisotropie

Origines

**Discretisation**

## Decomposition de Voronoï

Euclide et  
Lagrange

Voronoï

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$$

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

## Schémas aux différences finies

La discrétisation d'une EDP est préalable à sa résolution numérique. Ici : approximation par **différences finies**, sur grille d'échelle  $h$ , avec  $(e_i)_{i=1}^d$  la base canonique

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{u(x + he_i) - 2u(x) + u(x - he_i)}{h^2}$$

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

## Schémas aux différences finies

La discrétisation d'une EDP est préalable à sa résolution numérique. Ici : approximation par **différences finies**, sur grille d'échelle  $h$ , avec  $(e_i)_{i=1}^d$  la base canonique

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{u(x + he_i) - 2u(x) + u(x - he_i)}{h^2}$$

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max \left\{ 0, \frac{u(x) - u(x + he_i)}{h}, \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \right\}^2$$

### Anisotropie

Origines

Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et

Lagrange

Voronoi

### Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

### Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets

sismiques

### Conclusion

## Schémas aux différences finies

La discrétisation d'une EDP est préalable à sa résolution numérique. Ici : approximation par différences finies, sur grille d'échelle  $h$ , avec  $(e_i)_{i=1}^d$  la base canonique

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{u(x + he_i) - 2u(x) + u(x - he_i)}{h^2}$$

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max \left\{ 0, \frac{u(x) - u(x + he_i)}{h}, \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \right\}^2$$

L'extension aux opérateurs **non-linéaires et anisotropes**, en préservant la structure (ellipticité, causalité), pose problème.

## Schémas aux différences finies

La discrétisation d'une EDP est préalable à sa résolution numérique. Ici : approximation par différences finies, sur grille d'échelle  $h$ , avec  $(e_i)_{i=1}^d$  la base canonique

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{u(x + he_i) - 2u(x) + u(x - he_i)}{h^2}$$

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max \left\{ 0, \frac{u(x) - u(x + he_i)}{h}, \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \right\}^2$$

L'extension aux opérateurs non-linéaires et anisotropes, en préservant la structure (ellipticité, causalité), pose problème.

Kuo, Trudinger (1992'), Krylov (2005'), supposent des décompositions de matrices  $D$  symétriques définies positives

$$D = \sum_{1 \leq i \leq l} \rho_i e_i e_i^T, \quad \text{où } \rho_i \geq 0, \quad e_i \in \mathbb{Z}^d.$$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines

Discretisation

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

Conclusion

Conclusion

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

**Euclide et  
Lagrange**  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal  
Equation de Monge-Ampère et optique

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes  
Temps de trajets sismiques

## Conclusion

# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Euclide (300 BC): *“Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long.”*

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Calcul du PGCD

---

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$



# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Euclide (300 BC): *“Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long.”*

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Calcul du PGCD

---

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$



Euclide (300 BC): *"Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long."*

## Calcul du PGCD

---

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$



# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Euclide (300 BC): *“Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long.”*

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Calcul du PGCD

---

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$



0 1

# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

Euclide (300 BC): *"Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long."*

Lagrange (1773), remplace des longueurs par des vecteurs.

## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

### Calcul du PGCD

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $|a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

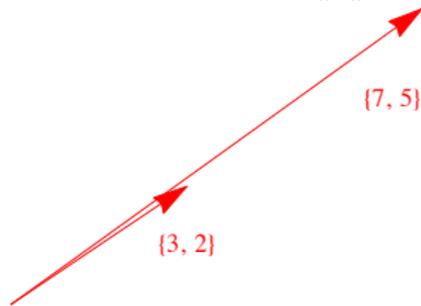
$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$

### Base réduite

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\|a\| \leq \|b\|$

**While**  $2|\langle b, a \rangle| > \|a\|^2$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \rfloor a, a)$$



# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Euclide (300 BC): *"Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long."*

Lagrange (1773), remplace des longueurs par des vecteurs.

## Calcul du PGCD

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $|a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

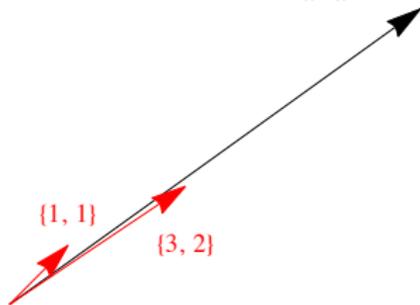
$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$

## Base réduite

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\|a\| \leq \|b\|$

**While**  $2|\langle b, a \rangle| > \|a\|^2$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \rfloor a, a)$$



Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

Euclide (300 BC): *"Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long."*

Lagrange (1773), remplace des longueurs par des vecteurs.

## Calcul du PGCD

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

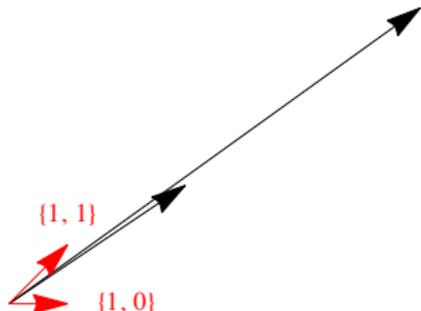
$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$

## Base réduite

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}^2, \|a\| \leq \|b\|$

**While**  $2|\langle b, a \rangle| > \|a\|^2$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \rfloor a, a)$$



# Algorithmes d'Euclide et de Lagrange

Euclide (300 BC): "Soustraire de façon répétée la longueur du plus court segment sur la longueur du plus long."

Lagrange (1773), remplace des longueurs par des vecteurs.

## Calcul du PGCD

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq |b|$

**While**  $a \neq 0$ :

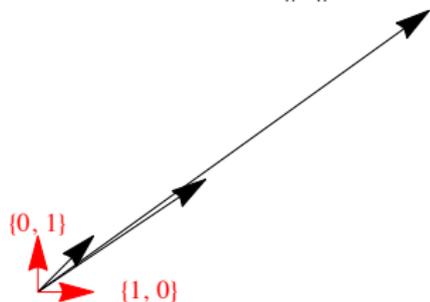
$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor b/a \rfloor a, a)$$

## Base réduite

**Input:**  $a, b \in \mathbb{Z}^2, \|a\| \leq \|b\|$

**While**  $2|\langle b, a \rangle| > \|a\|^2$ :

$$(a, b) \leftarrow (b - \lfloor \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2} \rfloor a, a)$$



L'algorithme de Lenstra-Lenstra-Lovatz (1982) est une généralisation en grande dimension de l'algorithme de Lagrange.

## Décomposition matricielle

En appliquant Lagrange au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  associé à  $D \in S_2^{++}$ , symétrique définie positive, on obtient  $a, b \in \mathbb{Z}^2$  tq

► (Base  $D$ -réduite)  $|\det(a, b)| = 1$ , et

$$2|\langle a, b \rangle_D| \leq \|a\|_D^2 \leq \|b\|_D^2.$$

## Décomposition matricielle

En appliquant Lagrange au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  associé à  $D \in S_2^{++}$ , symétrique définie positive, on obtient  $a, b \in \mathbb{Z}^2$  tq

- ▶ (Base  $D$ -réduite)  $|\det(a, b)| = 1$ , et

$$2|\langle a, b \rangle_D| \leq \|a\|_D^2 \leq \|b\|_D^2.$$

En posant  $v_0 = a$ ,  $v_1 = \pm b$ ,  $v_2 = -v_0 - v_1$  on a une

- ▶ (Superbase  $D$ -obtuse)  $v_0 + v_1 + v_2 = 0$ ,  $|\det(v_1, v_2)| = 1$ ,

$$\langle v_i, v_j \rangle_D \leq 0, \quad \forall 0 \leq i < j \leq 2.$$

## Décomposition matricielle

En appliquant Lagrange au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  associé à  $D \in S_2^{++}$ , symétrique définie positive, on obtient  $a, b \in \mathbb{Z}^2$  tq

- ▶ (Base  $D$ -réduite)  $|\det(a, b)| = 1$ , et

$$2|\langle a, b \rangle_D| \leq \|a\|_D^2 \leq \|b\|_D^2.$$

En posant  $v_0 = a$ ,  $v_1 = \pm b$ ,  $v_2 = -v_0 - v_1$  on a une

- ▶ (Superbase  $D$ -obtuse)  $v_0 + v_1 + v_2 = 0$ ,  $|\det(v_1, v_2)| = 1$ ,

$$\langle v_i, v_j \rangle_D \leq 0, \quad \forall 0 \leq i < j \leq 2.$$

On en déduit une décomposition à coefficients positifs et offsets entiers de la matrice  $D$ , grâce à la

- ▶ (Formule de Selling) Soit  $e_{ij} := v_k^\perp$  qd  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$

$$D = - \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle_D e_{ij} e_{ij}^\top.$$

Matrice paramétrée par  $D = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ ,  $a^2 + b^2 < 1$ .

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

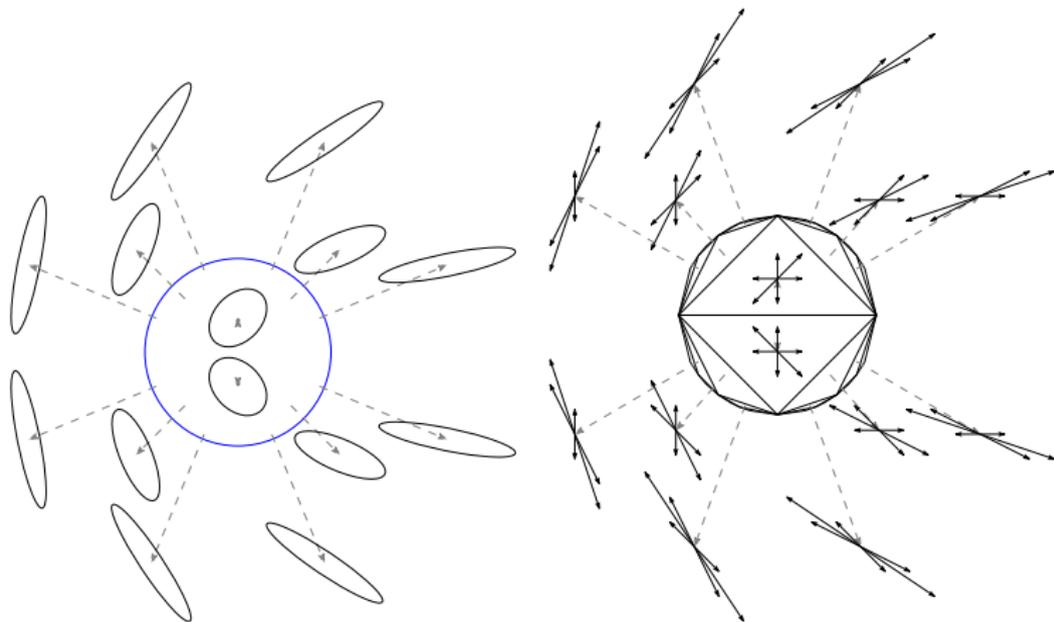


Figure: Gauche: boule unité de  $\|\cdot\|_D$ . Droite: offsets  $(e_{ij})_{i \neq j}$ .

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines

Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

**Voronoi**

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

**Voronoi**

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

### Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

### Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

### Conclusion

## Conclusion

Voronoi (1908) généralise le problème en dimension  $d$

$$\max_{\rho \geq 0} \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) \quad \text{sous contrainte} \quad \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) e e^T = D$$

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

**Voronoi**

Ellipticité

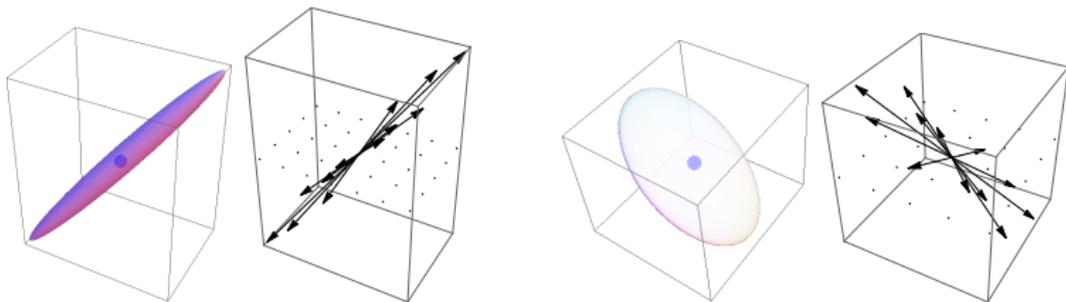
Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

et lie sa résolution à la classification des *formes parfaites*,  
correspondant aux empilements périodiques rigides de sphères.



Voronoi (1908) généralise le problème en dimension  $d$

$$\max_{\rho \geq 0} \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) \quad \text{sous contrainte} \quad \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) e e^T = D$$

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

**Voronoi**

Ellipticité

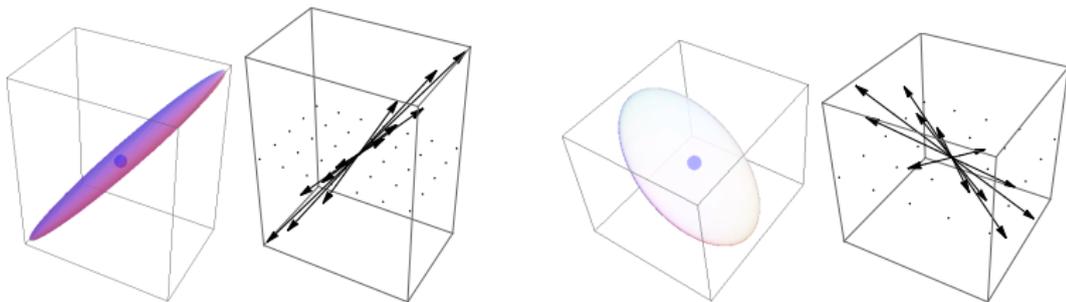
Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

et lie sa résolution à la classification des *formes parfaites*,  
correspondant aux empilements périodiques rigides de sphères.



Voronoi (1908) généralise le problème en dimension  $d$

$$\max_{\rho \geq 0} \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) \quad \text{sous contrainte} \quad \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) e e^T = D$$

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

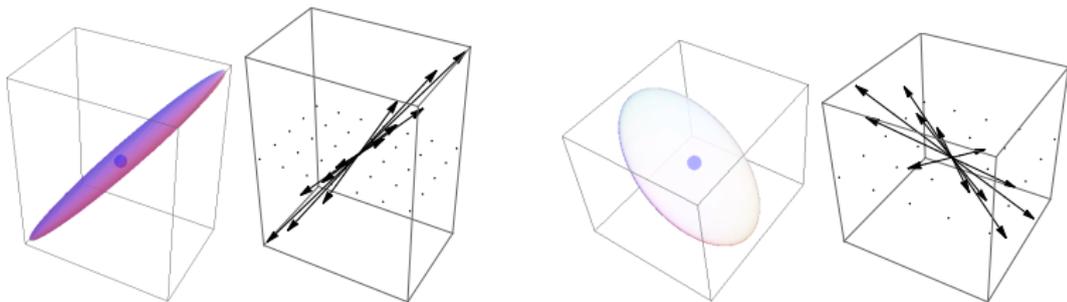
Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

et lie sa résolution à la classification des *formes parfaites*, correspondant aux empilements périodiques rigides de sphères.

Selling 1874 ( $d=3$ ), Korkine, Zolotareff 1877 ( $d=4,5$ ), Barnes 1954 ( $d=6$ ), Stacey 1976 ( $d=7$ ), Schurman 2007 ( $d=8$ ).



# Propriétés de la *première réduction* de Voronoi

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

- Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq N} \rho_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, \mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq N.$$

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

**Voronoi**

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Sans restreindre la généralité,  $N = d(d + 1)/2$

# Propriétés de la *première réduction* de Voronoi

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

- Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq N} \rho_i e_i e_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, e_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq N.$$

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Sans restreindre la généralité,  $N = d(d + 1)/2$

- Support borné  $\|e_i\| \leq C \sqrt{\|D\| \|D^{-1}\|}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Découle de la finitude des classes de formes parfaites.

# Propriétés de la *première réduction* de Voronoi

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

- Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq N} \rho_i e_i e_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, e_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq N.$$

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Sans restreindre la généralité,  $N = d(d + 1)/2$

- Support borné  $\|e_i\| \leq C \sqrt{\|D\| \|D^{-1}\|}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Découle de la finitude des classes de formes parfaites.

- Unicité en dimension  $d \leq 3$ .

Choix canonique en dimension 4.

# Propriétés de la *première réduction* de Voronoi

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

- Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq N} \rho_i e_i e_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, e_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq N.$$

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Sans restreindre la généralité,  $N = d(d + 1)/2$

- Support borné  $\|e_i\| \leq C \sqrt{\|D\| \|D^{-1}\|}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Découle de la finitude des classes de formes parfaites.

- Unicité en dimension  $d \leq 3$ .

Choix canonique en dimension 4.

- Régularité Lipschitz (affine par morceaux) de  $D \mapsto \rho(e; D)$ .

Théoriquement insuffisant pour certaines applications EDP.

# Propriétés de la *première réduction* de Voronoi

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

- Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq N} \rho_i e_i e_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, e_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq N.$$

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

Sans restreindre la généralité,  $N = d(d + 1)/2$

- Support borné  $\|e_i\| \leq C \sqrt{\|D\| \|D^{-1}\|}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Découle de la finitude des classes de formes parfaites.

- Unicité en dimension  $d \leq 3$ .

Choix canonique en dimension 4.

- Régularité Lipschitz (affine par morceaux) de  $D \mapsto \rho(e; D)$ .

Théoriquement insuffisant pour certaines applications EDP.

- Offsets générateurs de  $\mathbb{Z}^d$  en dimension  $d \leq 4$ :

$$\exists 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq N, \quad |\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_d})| = 1.$$

Pas d'artefact en échiquier.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

## Anisotropie

Origines

Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

## Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

## Conclusion

## Conclusion

# Schéma aux différences finies *dégénéré elliptique*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout  $x \in X$ , où  $X$  est un ensemble fini et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

## Schéma aux différences finies *dégénéré elliptique*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout  $x \in X$ , où  $X$  est un ensemble fini et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Schéma discret dégénéré elliptique (DDE)

Si  $\tilde{F}$  est croissante en sa seconde et troisième variable.

#### Anisotropie

Origines  
Discretisation

#### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

#### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

#### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

#### Conclusion

## Schéma aux différences finies *dégénéré elliptique*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout  $x \in X$ , où  $X$  est un ensemble fini et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Schéma discret dégénéré elliptique (DDE)

Si  $\tilde{F}$  est croissante en sa seconde et troisième variable.

- ▶ Principe de comparaison strict : si  $Fu < Fv$ , alors  $u < v$ .

#### Anisotropie

Origines  
Discretisation

#### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

#### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

#### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

#### Conclusion

## Schéma aux différences finies *dégénéré elliptique*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout  $x \in X$ , où  $X$  est un ensemble fini et  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Schéma discret dégénéré elliptique (DDE)

Si  $\tilde{F}$  est croissante en sa seconde et troisième variable.

► Principe de comparaison strict : si  $Fu < Fv$ , alors  $u < v$ .

### Preuve.

Soit  $x \in X$  tel que  $t := u(x) - v(x)$  est maximal. On suppose  $t \geq 0$ , sinon le résultat est prouvé, et on obtient la contradiction

$$Fv(x) \leq F[v + t](x) \leq Fu(x) < Fv(x).$$

(i) Croissance en 2ème variable, (ii) croissance en 3ème variable, et  $u(x) - u(y) \geq v(x) - v(y)$ ,  $y \in X \setminus \{x\}$ , (iii) hypothèse  $\square$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines

Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

### Ellipticité

**Diffusion**

Monge-Ampère

### Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

### Conclusion

## Conclusion

# Diffusion anisotrope

## Schéma DDE

$$\Delta_h^D u(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i \frac{u(x - he_i) - 2u(x) + u(x + he_i)}{h^2},$$

### Anisotropie

### Decomposition de Voronoi

### Ellipticité

### Causalité

### Conclusion

où  $D = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i e_i^\top$ . Consistance  $\Delta_h^D u = \text{Tr}(D \nabla^2 u) + \mathcal{O}(h^2)$ .

# Diffusion anisotrope

## Schéma DDE

$$\Delta_h^D u(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i \frac{u(x - he_i) - 2u(x) + u(x + he_i)}{h^2},$$

où  $D = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i e_i^\top$ . Consistance  $\Delta_h^D u = \text{Tr}(D \nabla^2 u) + \mathcal{O}(h^2)$ .

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

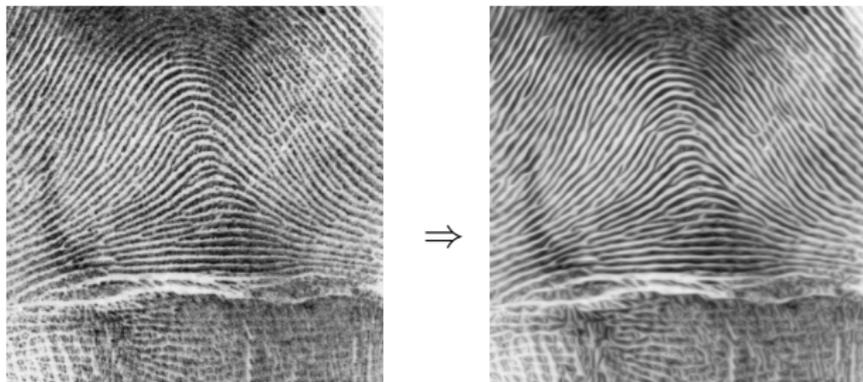
### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion



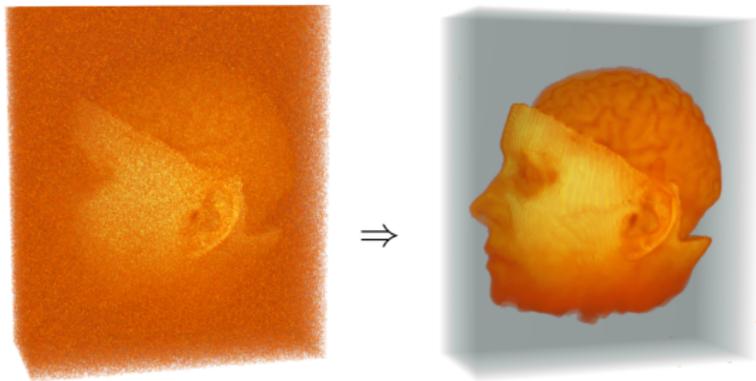
**Figure:** Application au débruitage d'images, Fehrenbach, M, 2014.  
Schéma utilisant la même décomposition de Voronoi, mais EDP un peu différente (non-lin, sous forme divergence)  $\partial_t u = \text{div}(D(u) \nabla u)$ .

# Diffusion anisotrope

## Schéma DDE

$$\Delta_h^D u(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i \frac{u(x - he_i) - 2u(x) + u(x + he_i)}{h^2},$$

où  $D = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i e_i^\top$ . Consistance  $\Delta_h^D u = \text{Tr}(D \nabla^2 u) + \mathcal{O}(h^2)$ .



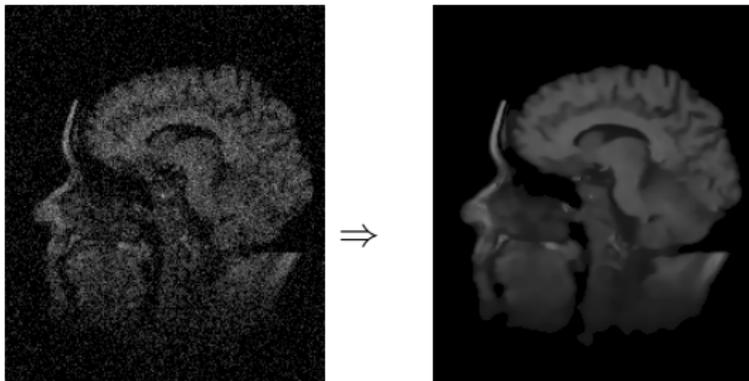
**Figure:** Application au débruitage d'images, Fehrenbach, M, 2014. Schéma utilisant la même décomposition de Voronoi, mais EDP un peu différente (non-lin, sous forme divergence)  $\partial_t u = \text{div}(D(u) \nabla u)$ .

# Diffusion anisotrope

## Schéma DDE

$$\Delta_h^D u(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i \frac{u(x - he_i) - 2u(x) + u(x + he_i)}{h^2},$$

où  $D = \sum_{i=1}^n \rho_i e_i e_i^\top$ . Consistance  $\Delta_h^D u = \text{Tr}(D \nabla^2 u) + \mathcal{O}(h^2)$ .



**Figure:** Application au débruitage d'images, Fehrenbach, M, 2014. Schéma utilisant la même décomposition de Voronoi, mais EDP un peu différente (non-lin, sous forme divergence)  $\partial_t u = \text{div}(D(u) \nabla u)$ .

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines

Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

### Ellipticité

Diffusion

**Monge-Ampère**

### Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

### Conclusion

## Conclusion

## Opérateur de Monge-Ampère $\det(\nabla^2 u)$

- Si  $M \succeq 0$  ( $M$  est semi-définie positive) on a l'identité:

$$d \det(M)^{\frac{1}{d}} = \min\{\text{Tr}(DM); \det(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
**Monge-Ampère**

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

## Opérateur de Monge-Ampère $\det(\nabla^2 u)$

- ▶ Si  $M \succeq 0$  ( $M$  est semi-définie positive) on a l'identité:

$$d \det(M)^{\frac{1}{d}} = \min\{\text{Tr}(DM); \det(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

- ▶ On en déduit un schéma DDE pour Monge-Ampère

$$d \det(\nabla^2 u(x))^{\frac{1}{d}} \approx \min\{\Delta_h^D u(x); \det(D) = 1, D \succeq 0\},$$

qui suppose  $\nabla^2 u(x) \succeq 0$ . Benamou, Collino, M, 2016.

## Opérateur de Monge-Ampère $\det(\nabla^2 u)$

- ▶ Si  $M \succeq 0$  ( $M$  est semi-définie positive) on a l'identité:

$$d \det(M)^{\frac{1}{d}} = \min\{\text{Tr}(DM); \det(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

- ▶ On en déduit un schéma DDE pour Monge-Ampère

$$d \det(\nabla^2 u(x))^{\frac{1}{d}} \approx \min\{\Delta_h^D u(x); \det(D) = 1, D \succeq 0\},$$

qui suppose  $\nabla^2 u(x) \succeq 0$ . Benamou, Collino, M, 2016.

## Reformulation stable (Feng, Jensen, 2017)

- ▶ Alternativement, ( $M \succeq 0$  et  $\det(M) = g$ ) ssi

$$0 = \max\{dg^{\frac{1}{d}} \det(D)^{\frac{1}{d}} - \text{Tr}(DM); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

## Opérateur de Monge-Ampère $\det(\nabla^2 u)$

- ▶ Si  $M \succeq 0$  ( $M$  est semi-définie positive) on a l'identité:

$$dg^{\frac{1}{d}} - d \det(M)^{\frac{1}{d}} = \max\{dg^{\frac{1}{d}} - \text{Tr}(DM); \det(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

- ▶ On en déduit un schéma DDE pour Monge-Ampère

$$d \det(\nabla^2 u(x))^{\frac{1}{d}} \approx \min\{\Delta_h^D u(x); \det(D) = 1, D \succeq 0\},$$

qui suppose  $\nabla^2 u(x) \succeq 0$ . Benamou, Collino, M, 2016.

## Reformulation stable (Feng, Jensen, 2017)

- ▶ Alternativement, ( $M \succeq 0$  et  $\det(M) = g$ ) ssi

$$0 = \max\{dg^{\frac{1}{d}} \det(D)^{\frac{1}{d}} - \text{Tr}(DM); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

## Opérateur de Monge-Ampère $\det(\nabla^2 u)$

- ▶ Si  $M \succeq 0$  ( $M$  est semi-définie positive) on a l'identité:

$$dg^{\frac{1}{d}} - d \det(M)^{\frac{1}{d}} = \max\{dg^{\frac{1}{d}} - \text{Tr}(DM); \det(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

- ▶ On en déduit un schéma DDE pour Monge-Ampère

$$d \det(\nabla^2 u(x))^{\frac{1}{d}} \approx \min\{\Delta_h^D u(x); \det(D) = 1, D \succeq 0\},$$

qui *suppose*  $\nabla^2 u(x) \succeq 0$ . Benamou, Collino, M, 2016.

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

## Reformulation stable (Feng, Jensen, 2017)

- ▶ Alternativement, ( $M \succeq 0$  et  $\det(M) = g$ ) ssi

$$0 = \max\{dg^{\frac{1}{d}} \det(D)^{\frac{1}{d}} - \text{Tr}(DM); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

- ▶ D'où le schéma numérique DDE

$$0 = \max\{dg^{\frac{1}{d}} \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\},$$

qui *impose*  $\nabla^2 u(x) \succeq 0$  et  $\det(\nabla^2 u(x)) \approx g(x)$ .

Matrice paramétrée par  $D = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ ,  $a^2 + b^2 < 1$ .

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

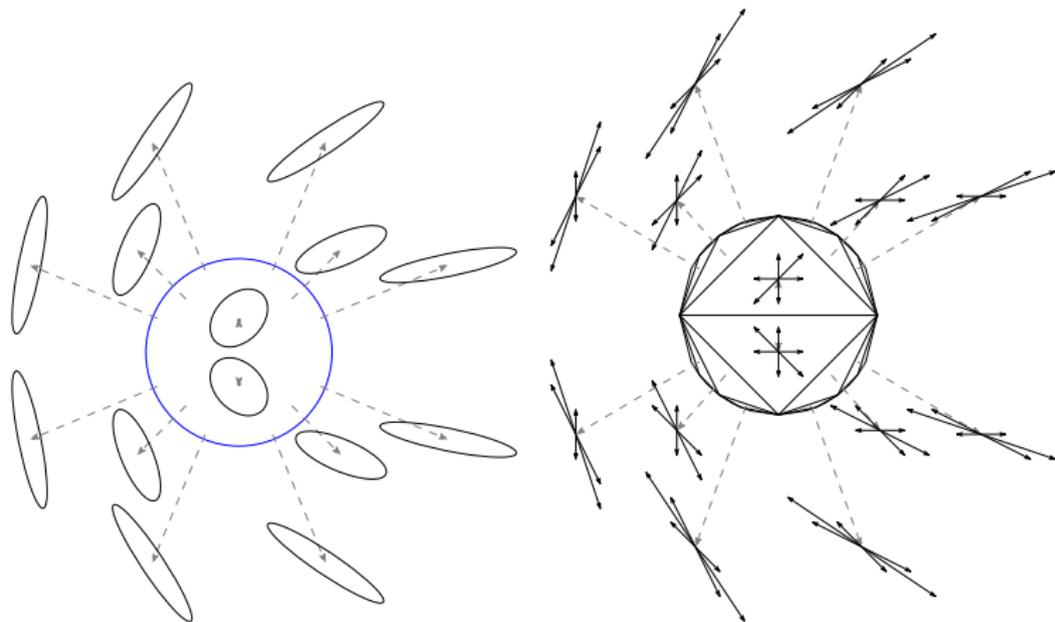


Figure: Gauche: boule unité de  $\|\cdot\|_D$ . Droite: offsets  $(e_i)_{i=1}^3$ .

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

On souhaite maximiser efficacement

$$\max\{\tilde{g}(x) \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
**Monge-Ampere**

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

On souhaite maximiser efficacement

$$\max\{\tilde{g}(x) \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

parmi les matrices  $D$  s'écrivant

$$D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i e_i e_i^\top,$$

où  $(e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{Z}^2)^3$  est une superbase fixée, et  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \geq 0$ .

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

On souhaite maximiser efficacement

$$\max\{\tilde{g}(x) \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

parmi les matrices  $D$  s'écrivant

$$D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i e_i e_i^T,$$

où  $(e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{Z}^2)^3$  est une superbase fixée, et  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \geq 0$ .

$$\text{Tr } D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \|e_i\|^2, \quad \det D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \rho_{i+1}, \quad \Delta_h^D u(x) = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \delta_i.$$

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

On souhaite maximiser efficacement

$$\max\{\tilde{g}(x) \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

parmi les matrices  $D$  s'écrivant

$$D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i e_i e_i^\top,$$

où  $(e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{Z}^2)^3$  est une superbase fixée, et  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \geq 0$ .

$$\text{Tr } D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \|e_i\|^2, \quad \det D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \rho_{i+1}, \quad \Delta_h^D u(x) = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \delta_i.$$

► Pour chaque superbase donnée, le max est explicite.

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

On souhaite maximiser efficacement

$$\max\{\tilde{g}(x) \det(D)^{\frac{1}{d}} - \Delta_h^D u(x); \text{Tr}(D) = 1, D \succeq 0\}.$$

parmi les matrices  $D$  s'écrivant

$$D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i e_i e_i^\top,$$

où  $(e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{Z}^2)^3$  est une superbase fixée, et  $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \geq 0$ .

$$\text{Tr } D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \|e_i\|^2, \quad \det D = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \rho_{i+1}, \quad \Delta_h^D u(x) = \sum_{0 \leq i \leq 2} \rho_i \delta_i.$$

- ▶ Pour chaque superbase donnée, le max est explicite.
- ▶ En choisissant suffisamment de superbases, on couvre les matrices  $D \in S_2^{++}$  de conditionnement borné donné.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

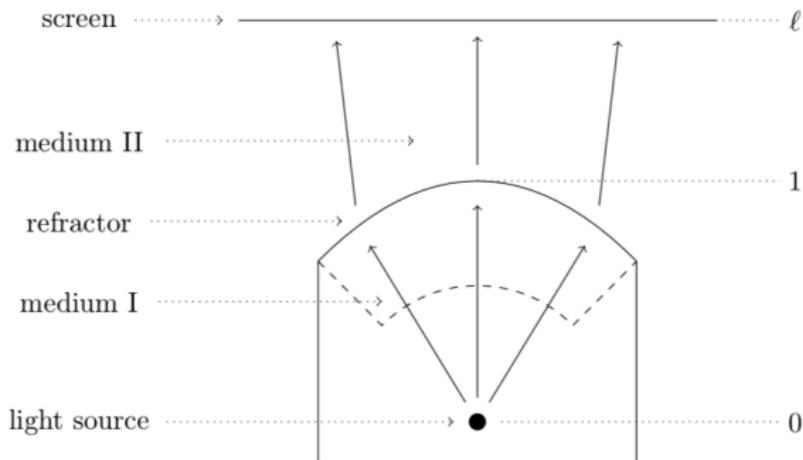


Figure: Problème du réfracteur en champ lointain.

La conception d'un réfracteur projetant une image donnée sur un écran lointain se ramène à résoudre

$$\det(\nabla^2 u(x) - A(x, \nabla u(x))) = B(x, \nabla u(x)),$$

$x \in \Omega$ , avec conditions au bord  $\nabla u(x) \in P(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

📄 Guillaume Bonnet, M, *Monotone discretization of the Monge-Ampère equation of optimal transport*, submitted, 2021

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau



Figure: G: image à reproduire. D: rendu appelseed<sup>®</sup>.

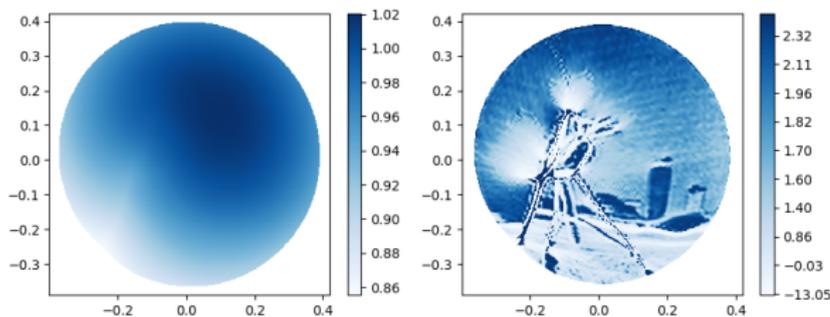


Figure: G: image du réfracteur. D: courbure du réfracteur

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines

Discretisation

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

Conclusion

Conclusion

# Schéma aux différences finies *causal*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout  $x \in X$ , où  $X$  est un ensemble fini et  $u : X \rightarrow \mathbb{E}$ .

## Causalité

Si  $\tilde{F}$  ne dépend que de la partie positive de sa troisième variable:

$$Fu(x) = \tilde{F}(x, u(x), (\max\{0, u(x) - u(y)\})_{y \in X \setminus \{x\}}).$$

- ▶ “ $u(x)$  ne dépend de  $u(y)$  que si  $u(x) > u(y)$ .”
- ▶ Permet de résoudre  $Fu = 0$  en une passe sur le domaine, en utilisant la méthode du Fast-Marching ( $\sim$  Dijkstra).  
Sous des hypothèses adéquates, dont ellipticité dégénérée

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

## Anisotropie

Origines

Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

## Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

## Causalité

**Distances  
Riemanniennes**

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

## Conclusion

## Conclusion

# Equation eikonale et plus courts chemins

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



Equation eikonale

$$1 = \|\nabla u(x)\|^2$$

# Equation eikonale et plus courts chemins

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



Equation eikonale

$$1 = \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

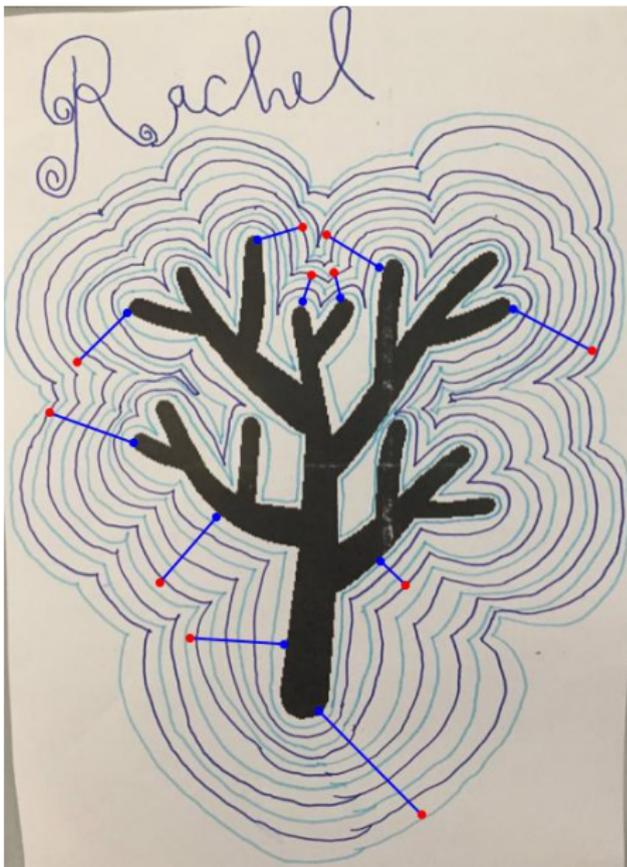
Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

# Equation eikonale et plus courts chemins



Equation eikonale

$$1 = \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

Plus courts chemins via  
descente de gradient.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

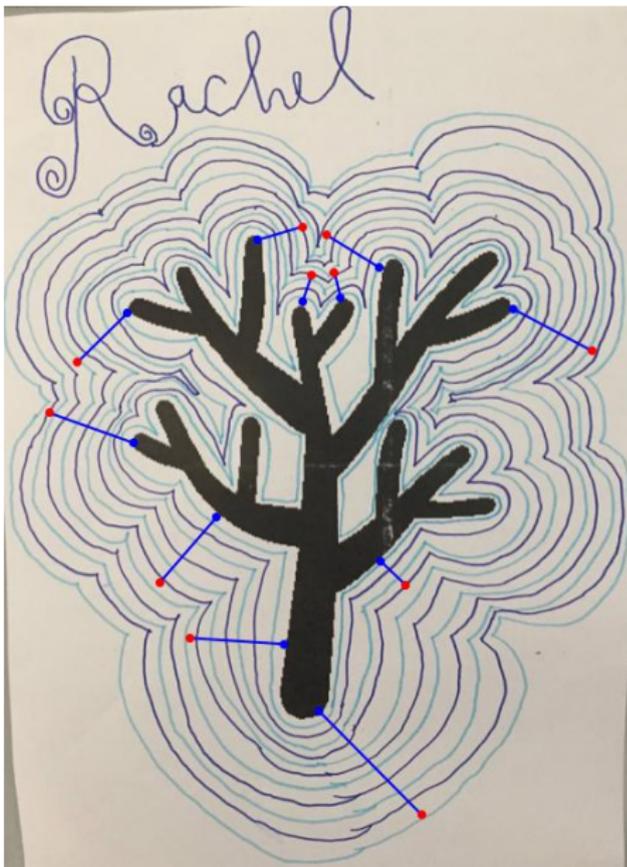
Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

# Equation eikonale et plus courts chemins



Equation eikonale

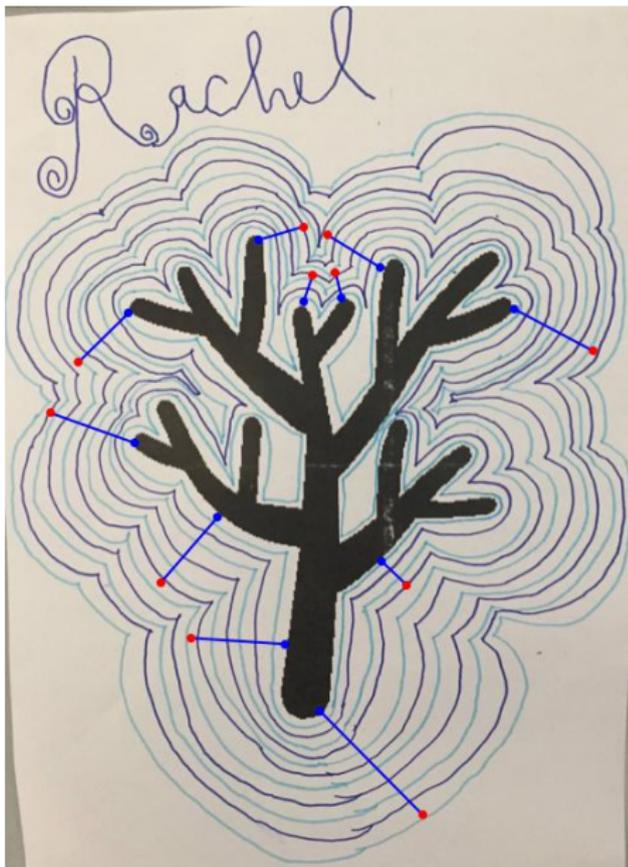
$$1 = \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

Plus courts chemins via  
descente de gradient.

► Variante  
Riemannienne

$$\|\nabla u(x)\|_{D(x)}^2$$

# Equation eikonale et plus courts chemins



## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

## Equation eikonale

$$1 = \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

Plus courts chemins via  
descente de gradient.

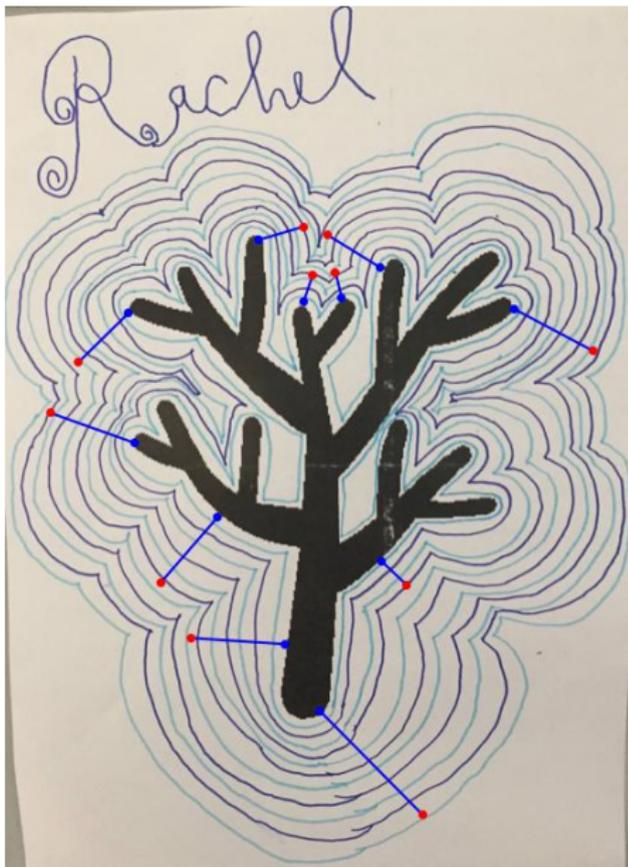
- ▶ Variante  
Riemannienne

$$\|\nabla u(x)\|_{D(x)}^2$$

- ▶ Sous-Riemannienne

$$\|\nabla u(x)\|_{D_\varepsilon(x)}^2, \varepsilon \rightarrow 0$$

# Equation eikonale et plus courts chemins



## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

## Conclusion

## Equation eikonale

$$1 = \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$
$$\approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

Plus courts chemins via  
descente de gradient.

- ▶ Variante  
Riemannienne

$$\|\nabla u(x)\|_{D(x)}^2$$

- ▶ Sous-Riemannienne  
 $\|\nabla u(x)\|_{D_\varepsilon(x)}^2, \varepsilon \rightarrow 0$

- ▶ Finsler  $N_x(\nabla u(x))$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

# Géométrie SR et segmentation de vaisseaux rétiniens

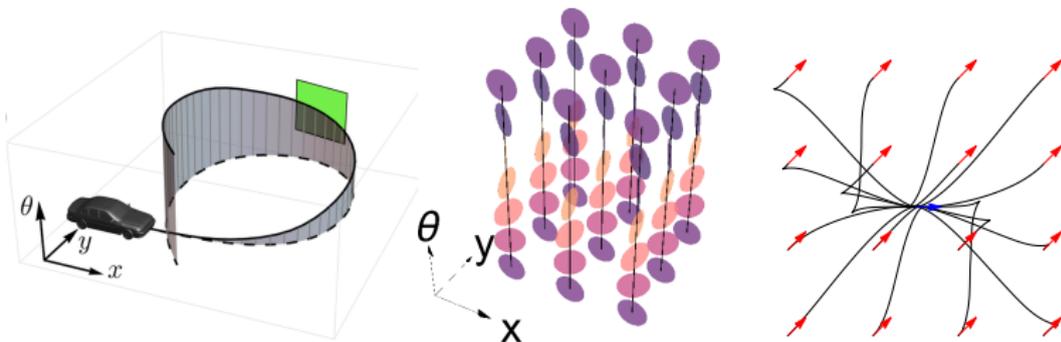
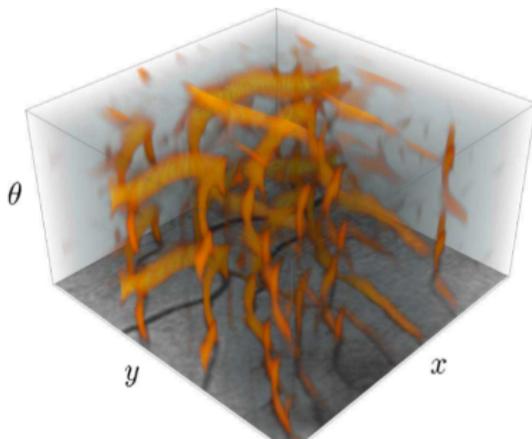


Figure: *Haut* : Véhicule de Reeds-Shepp, modèle sous-riemannien dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . *Bas* : Fonction de coût  $c(x, y, \theta)$ , issue d'un scan.



# Géométrie SR et segmentation de vaisseaux rétiniens

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

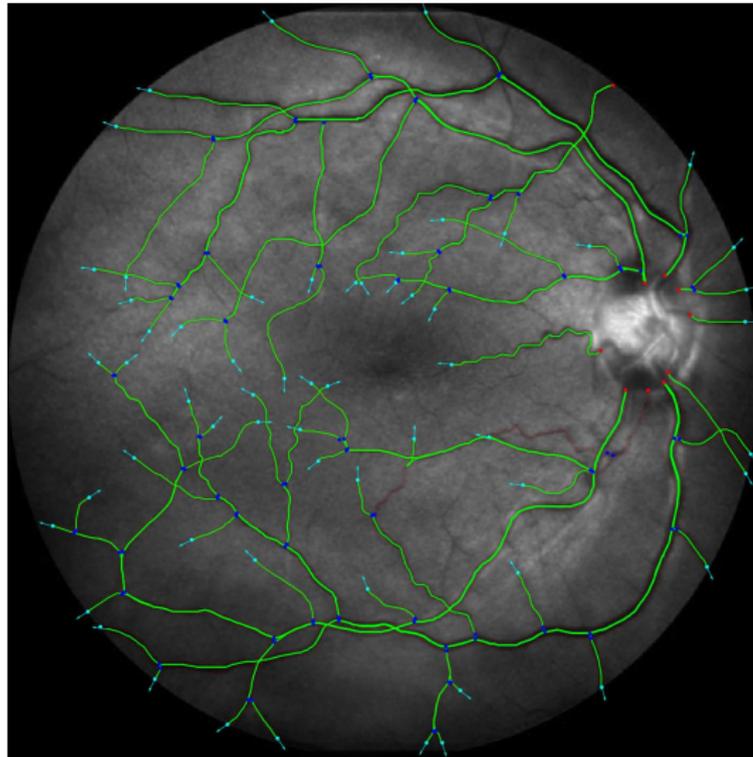


Figure: Chemins minimaux du véhicule de Reeds-Shepp, avec coût  $c(x, y, \theta)$ , projetés sur  $\mathbb{R}^2$ . Duits, Sanguinetti, Bekkers, Jansen, Mashtakov, M, 2015

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

## Anisotropie

Origines

Discretisation

### Anisotropie

Origines

Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

## Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

## Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

### Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

### Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

## Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

### Conclusion

## Conclusion

L'EDP eikonale des modèles TTI (*Tilted Transverse Isotropic*) sismiques est l'enveloppe d'EDP Riemanniennes.  $N_x(\nabla u(x)) = 1$



Figure: Boule unité duale pour le Mica, Olivine, Stishovite

- Norme Finslérienne symétrique (parfois min et non max)

$$N_x(v) = \max_{D \in \mathcal{D}_x} \|v\|_D$$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

L'EDP eikonale des modèles TTI (*Tilted Transverse Isotropic*) sismiques est l'enveloppe d'EDP Riemanniennes.  $N_x(\nabla u(x)) = 1$



Figure: Boule unité duale pour le Mica, Olivine, Stishovite

- Norme Finlérienne symétrique (parfois min et non max)

$$N_x(v) = \max_{D \in \mathcal{D}_x} \|v\|_D$$

- Schéma de discrétisation

$$N_x(\nabla u(x))^2 \approx \max_{D \in \mathcal{D}_x} \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i(D) \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

L'EDP eikonale des modèles TTI (*Tilted Transverse Isotropic*) sismiques est l'enveloppe d'EDP Riemanniennes.  $N_x(\nabla u(x)) = 1$



Figure: Boule unité duale pour le Mica, Olivine, Stishovite

- ▶ Norme Finlérienne symétrique (parfois min et non max)

$$N_x(v) = \max_{D \in \mathcal{D}_x} \|v\|_D$$

- ▶ Schéma de discrétisation

$$N_x(\nabla u(x))^2 \approx \max_{D \in \mathcal{D}_x} \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i(D) \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x \pm h e_i)}{h}\right\}^2$$

- ▶ Dégénéré elliptique et causal.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

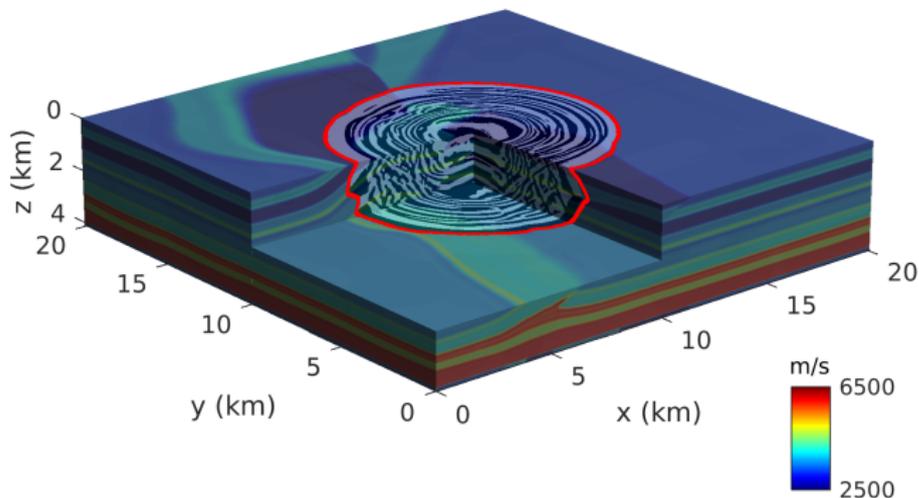
Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



📄 Desquilbet, Cao, Cupillard, Métivier, M. *Single pass computation of first seismic wave travel time in three dimensional heterogeneous media with general anisotropy*, submitted, 2021

Images issues d'une méthode un peu différente. L'approche Eulerienne présentée ici s'adapte au GPU, accélération 30x.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

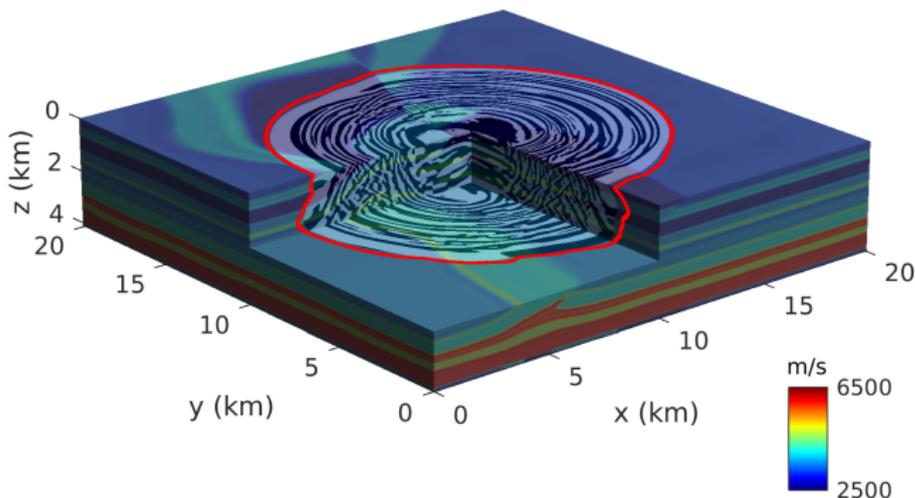
Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



📄 Desquilbet, Cao, Cupillard, Métivier, M. *Single pass computation of first seismic wave travel time in three dimensional heterogeneous media with general anisotropy*, submitted, 2021

Images issues d'une méthode un peu différente. L'approche Eulerienne présentée ici s'adapte au GPU, accélération 30×.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

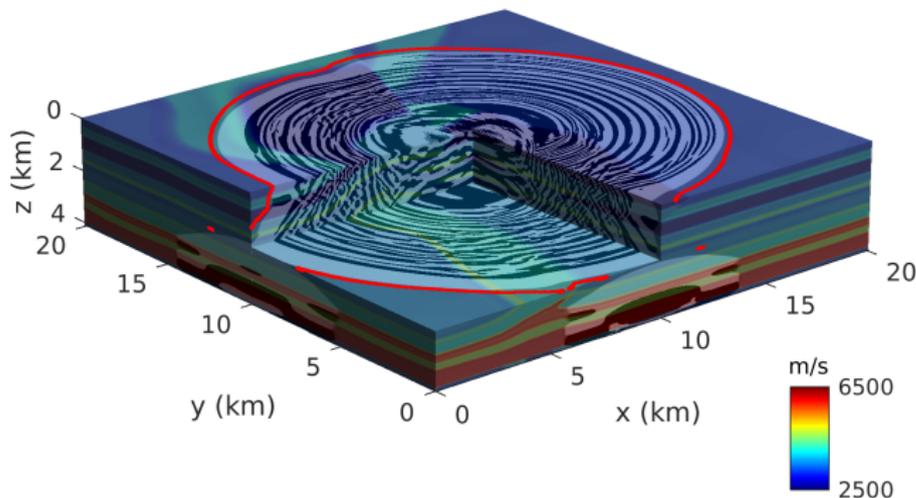
Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



📄 Desquilbet, Cao, Cupillard, Métivier, M. *Single pass computation of first seismic wave travel time in three dimensional heterogeneous media with general anisotropy*, submitted, 2021

Images issues d'une méthode un peu différente. L'approche Eulerienne présentée ici s'adapte au GPU, accélération 30×.

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines  
Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

Ellipticité

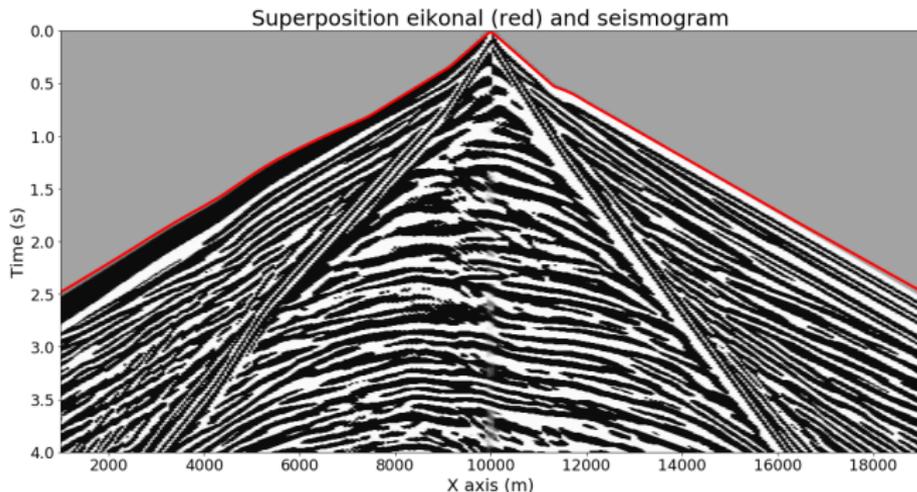
Diffusion  
Monge-Ampere

Causalité

Distances  
Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Conclusion



📄 Desquilbet, Cao, Cupillard, Métivier, M. *Single pass computation of first seismic wave travel time in three dimensional heterogeneous media with general anisotropy*, submitted, 2021

Images issues d'une méthode un peu différente. L'approche Eulerienne présentée ici s'adapte au GPU, accélération 30x.

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

Les ellipses  $D \in \mathcal{D}_x$  tangentes aux modèles TTI se paramètrent

$$D = \alpha(s)[(1 - s)D_0 + sD_1], \quad 0 \leq s \leq 1.$$

## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
**Temps de trajets  
sismiques**

## Conclusion

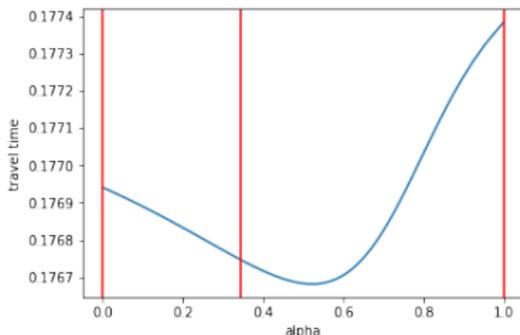


Figure: Exemple de problème 1D discrétisant  $N_x(\nabla u(x))$ .

# Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

Les ellipses  $D \in \mathcal{D}_x$  tangentes aux modèles TTI se paramètrent

$$D = \alpha(s)[(1 - s)D_0 + sD_1], \quad 0 \leq s \leq 1.$$

- ▶ Linearité de  $(1 - s)D_0 + sD_1$

Sa décomposition a des poids linéaires par morceaux, sur une partition  $0 = s_0 < \dots < s_k = 1$ .

## Anisotropie

Origines  
Discretisation

## Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

## Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

## Causalité

Distances  
Riemanniennes  
**Temps de trajets  
sismiques**

## Conclusion

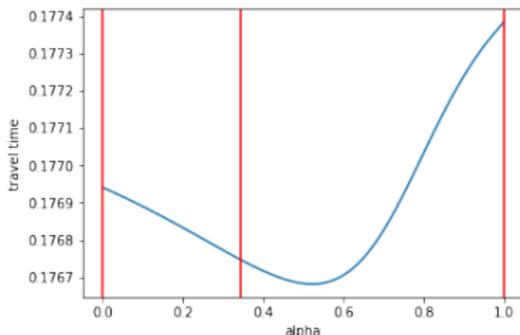


Figure: Exemple de problème 1D discrétisant  $N_x(\nabla u(x))$ .

## Implémentation efficace de l'optimisation du schéma

Les ellipses  $D \in \mathcal{D}_x$  tangentes aux modèles TTI se paramètrent

$$D = \alpha(s)[(1 - s)D_0 + sD_1], \quad 0 \leq s \leq 1.$$

- ▶ **Linearité de  $(1 - s)D_0 + sD_1$**

Sa décomposition a des poids linéaires par morceaux, sur une partition  $0 = s_0 < \dots < s_k = 1$ .

- ▶ **Convexité ou concavité de  $1/\alpha$**

Au plus un extremum local sur chaque intervalle  $[s_i, s_{i+1}]$ .

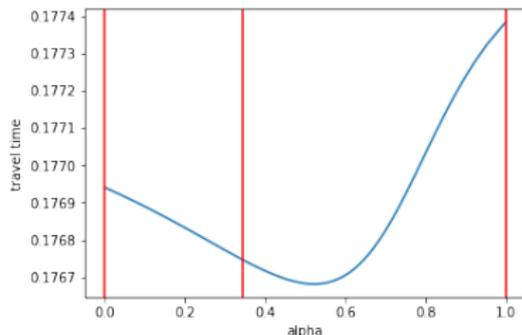


Figure: Exemple de problème 1D discrétisant  $N_x(\nabla u(x))$ .

EDPs  
anisotropes  
sur grille  
cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

Anisotropie

Origines

Discretisation

Anisotropie

Origines

Discretisation

Decomposition  
de Voronoi

Euclide et  
Lagrange

Voronoi

Décomposition matricielle adaptée à la grille

Euclide et Lagrange

Voronoi

Ellipticité

Diffusion

Monge-Ampère

Ellipticité

Diffusion et contrôle optimal

Equation de Monge-Ampère et optique

Causalité

Distances

Riemanniennes

Temps de trajets  
sismiques

Causalité

Distances Riemanniennes et sous-Riemanniennes

Temps de trajets sismiques

Conclusion

Conclusion

## EDPs anisotropes sur grille cartésienne

Jean-Marie  
Mirebeau

### Anisotropie

Origines  
Discretisation

### Decomposition de Voronoi

Euclide et  
Lagrange  
Voronoi

### Ellipticité

Diffusion  
Monge-Ampere

### Causalité

Distances  
Riemanniennes  
Temps de trajets  
sismiques

### Conclusion

- ▶ Les schémas aux différences finies restent un des moyens les plus efficaces de résoudre des EDPs, en particulier sur les architectures massivement parallèles.
- ▶ L'anisotropie pose des problèmes de conception, auxquels la décomposition de Voronoi apporte certaines réponses.
- ▶ Applications à l'imagerie médicale, l'imagerie sismique, ...

*Merci pour votre attention !*