Singularités d'applications harmoniques sur un domaine planaire à valeurs dans un espace homogène

Antonin Monteil (Bristol)

travail en collaboration avec
Jean Van Schaftingen (Louvain-la-Neuve)

SMAI, Juin 2021

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ domaine borné, $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ variété Riemannienne.

$$E(u) = \int_\Omega |Du|^2, \quad u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \Big\{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n),\ u \in \mathcal{N} \text{ p.p.}\Big\}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ domaine borné, $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ variété Riemannienne.

$$E(u) = \int_\Omega |Du|^2, \quad u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \Big\{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n),\ u \in \mathcal{N} \text{ p.p.} \Big\}$$

Définition

$u : \Omega \to \mathcal{N}$ est harmonique minimisante si

$$E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}),\ \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, v = \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, u.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ domaine borné, $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ variété Riemannienne.

$$E(u) = \int_\Omega |Du|^2, \quad u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n),\ u \in \mathcal{N} \text{ p.p.} \right\}$$

Définition

$u : \Omega \to \mathcal{N}$ est harmonique minimisante si

$$E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}),\ \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, v = \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, u.$$

u est (faiblement) harmonique si u est un point critique de E:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \int_\Omega |D[\Pi_{\mathcal{N}}(u + t\varphi)]|^2 \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

ou encore, si u résoud (faiblement) l'équation $\Delta u \perp T_u\mathcal{N}$

Théorème (Morrey)

Une application harmonique minimisante $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}$ est lisse.

Théorème (Schoen-Uhlenbeck)

Une application harmonique minimisante $u : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathcal{N}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus S)$ avec S de dimension de Hausdorff $\leq m - 3$.

De plus, $a \in S$ si et seulement s'il existe $(\rho_k) \to 0$ t.q.

$$u(a + \rho_k x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{harmonique minimisante}$$

avec $w : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathcal{N}$ harmonique et non triviale

S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma_0 : \partial\Omega \to \mathcal{N}$ alors

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|^2 \;:\; u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \text{ t.q. } \operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma_0 \right\}$$

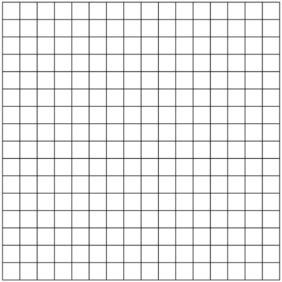
admet une solution

S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma_0 : \partial\Omega \to \mathcal{N}$ alors

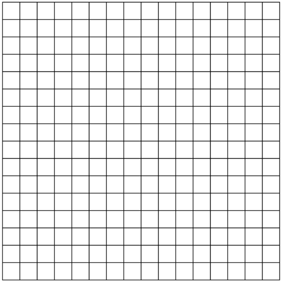
$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|^2 \ : \ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \text{ t.q. } \operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma_0 \right\}$$

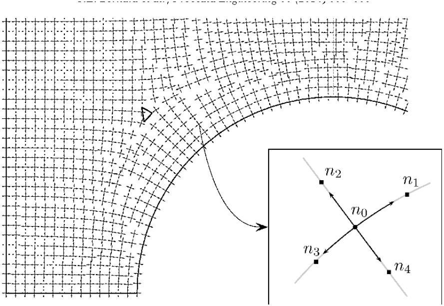
admet une solution

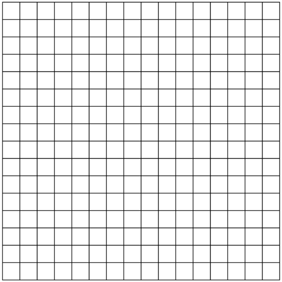
Problème en dimension $m = 2$: obstructions topologiques

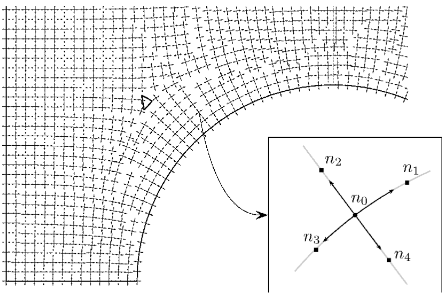


Obstructions topologiques : maillage cartésien









$$u : \Omega \to \mathcal{N} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] / \{0 \sim \pi/2\} \simeq \mathbb{S}^1$$

Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe. S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, u = \gamma$ alors γ est homotope au lacet constant.

Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe. S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma$ alors γ est homotope au lacet constant.

"Preuve" : Soit $u \in \operatorname{Argmin}\{\int_\Omega |Du|^2 \ : \ \operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma\}$,

Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe. S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, u = \gamma$ alors γ est homotope au lacet constant.

"Preuve" : Soit $u \in \mathrm{Argmin}\{\int_\Omega |Du|^2 \ : \ \mathrm{tr}_{\partial\Omega}\, u = \gamma\}$,

$\Longrightarrow$ u est continu.

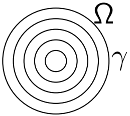
Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe. S'il existe $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma$ alors γ est homotope au lacet constant.

"Preuve" : Soit $u \in \operatorname{Argmin}\{\int_\Omega |Du|^2 \ : \ \operatorname{tr}_{\partial\Omega} u = \gamma\}$,

$\Longrightarrow$ u est continu.

$\Longrightarrow$ $\gamma = u_{|\partial\Omega}$ se rétracte en un point par u.



Soit $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B_\rho \setminus \{0\}, \mathcal{N})$ telle que $u(\rho\,\cdot) =: \gamma_0$

$$\int_{\partial B_r} |Du|^2 \geq \int_{\partial B_r} |\partial_\tau u|^2 \geq \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r}, \quad \forall r \in (0, \rho),$$

où

$$E(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma'|^2, \quad \Sigma(\gamma_0) = \{\text{géodésiques minimisantes homotopes à } \gamma_0\}$$

Soit $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B_\rho \setminus \{0\}, \mathcal{N})$ telle que $u(\rho\,\cdot) =: \gamma_0$

$$\int_{\partial B_r} |Du|^2 \geq \int_{\partial B_r} |\partial_\tau u|^2 \geq \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r}, \quad \forall r \in (0,\rho),$$

où

$$E(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma'|^2, \quad \Sigma(\gamma_0) = \{\text{géodésiques minimisantes homotopes à } \gamma_0\}$$

$$E(\Sigma(\gamma_0)) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma'|^2 \ : \ \gamma,\, \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{N} \text{ homotopes} \right\}$$

Soit $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B_\rho \setminus \{0\}, \mathcal{N})$ telle que $u(\rho\,\cdot) =: \gamma_0$

$$\int_{\partial B_r} |Du|^2 \geq \int_{\partial B_r} |\partial_\tau u|^2 \geq \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r}, \quad \forall r \in (0, \rho),$$

où

$$E(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} |\gamma'|^2, \quad \Sigma(\gamma_0) = \{\text{géodésiques minimisantes homotopes à } \gamma_0\}$$

Énergie renormalisée

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}(u, B_\rho) = \int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 - \frac{E_0(\gamma_0)}{r} \right) \mathrm{d}r$$

Théorème

Supposons que $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B_\rho \setminus \{0\}, \mathcal{N})$ ($\mathcal{N}$ compacte) minimise

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}(u, B_\rho) = \int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 - \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r} \right) \mathrm{d}r$$

avec une condition au bord $\mathrm{tr}_{\partial B_\rho} u = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{N}$ non dégénérée :

$$E(\gamma) \geq E(\Sigma(\gamma_0)) + C \operatorname{dist}_2(\gamma, \Sigma(\gamma_0))^2 \quad \text{si } \operatorname{dist}_{L^\infty}(\gamma, \Sigma(\gamma_0)) \ll 1$$

Alors il existe une géodésique $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{N}$ telle que

$$u(r\,\cdot) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \gamma\Big(\frac{x}{|x|}\Big) \quad \text{uniformément}$$

- (Variables conformes) Si $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$, alors

$$\int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r} \right) \mathrm{d}r$$
$$= \int_{|\log\rho|}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \right) \mathrm{d}t =: \int_{|\log\rho|}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- (Variables conformes) Si $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$, alors

$$\int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r} \right) \mathrm{d}r$$
$$= \int_{|\log\rho|}^\infty \left(\int_0^{2\pi} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \right) \mathrm{d}t =: \int_{|\log\rho|}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$$

- (Convergence en énergie) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$

- (Variables conformes) Si $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$, alors

$$\int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r} \right) \mathrm{d}r$$
$$= \int_{|\log\rho|}^\infty \left(\int_0^{2\pi} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \right) \mathrm{d}t =: \int_{|\log\rho|}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$$

- (Convergence en énergie) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$
- (Principe de comparaison) Par minimalité, on peut montrer que

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}(u, B_r) \leq C \text{ Énergie } W^{1/2,2}(\partial B_r)$$
$$\leq C\Big(\text{Énergie } W^{1,2}(\partial B_r)\Big)^{1/2}\Big(\text{Énergie } L^2(\partial B_r)\Big)^{1/2}$$

- (Variables conformes) Si $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$, alors

$$\int_0^\rho \left(\int_{\partial B_r} |Du|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \frac{E(\Sigma(\gamma_0))}{r} \right) \mathrm{d}r = \int_{|\log \rho|}^\infty \left(\int_0^{2\pi} |Dv|^2 \, \mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \right) \mathrm{d}t =: \int_{|\log \rho|}^\infty f(t) \, \mathrm{d}t$$

- (Convergence en énergie) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$
- (Principe de comparaison) Par minimalité, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\mathrm{ren}}(u, B_r) &\leq C \text{ Énergie } W^{1/2,2}(\partial B_r) \\
&\leq C \Big(\text{Énergie } W^{1,2}(\partial B_r) \Big)^{1/2} \Big(\text{Énergie } L^2(\partial B_r) \Big)^{1/2} \\
\Longrightarrow \int_{\tau = |\log r|}^\infty f(t) \, \mathrm{d}t &\leq C \, f(\tau)^{1/2} \operatorname{dist}_{L^2}\big(\operatorname{tr}_{\{\tau\}\times\mathbb{S}^1} v, \Sigma(\gamma_0)\big) \\
&\leq C \, f(\tau) \quad \text{(par non dégénérescence de l'énergie)}
\end{aligned}$$

- (Variables conformes) $v(t, \theta) := u(e^{-t} \cos \theta, e^{-t} \sin \theta)$
- (Convergence en énergie) $f(t) = \int_{\{t\} \times \mathbb{S}^1} |Dv|^2 \, \mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$
- (Comparaison) $\int_\tau^\infty f(t) \, \mathrm{d}t \leq C f(\tau)$,

- (Variables conformes) $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$
- (Convergence en énergie) $f(t) = \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^1} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- (Comparaison) $\int_\tau^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \le Cf(\tau)$,
- (Limite radiale)

$$\int_0^{2\pi}\int_{t_0}^\infty |\partial_t v| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta$$

- (Variables conformes) $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$
- (Convergence en énergie) $f(t) = \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^1} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- (Comparaison) $\int_\tau^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \leq Cf(\tau)$,
- (Limite radiale)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{t_0}^\infty |\partial_t v|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta &\leq \sqrt{2\pi}\int_{t_0}^\infty \Big(\int_0^{2\pi} |\partial_t v|^2\,\mathrm{d}\theta\Big)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_{t_0}^\infty \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= C\int_{t_0}^\infty \frac{|F'(t)|}{\sqrt{|F'(t)|}}\,\mathrm{d}t, \quad F(t) := \int_t^\infty f \\
&\leq C\int_{t_0}^\infty \frac{|F'(t)|}{\sqrt{F(t)}}\,\mathrm{d}t, \quad (F \leq C|F'|) \\
&= C\int_0^{F(t_0)} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} < +\infty
\end{aligned}$$

- (Variables conformes) $v(t,\theta) := u(e^{-t}\cos\theta, e^{-t}\sin\theta)$
- (Convergence en énergie) $f(t) = \int_{\{t\}\times\mathbb{S}^1} |Dv|^2 \,\mathrm{d}\theta - E(\Sigma(\gamma_0)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- (Comparaison) $\int_\tau^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \leq Cf(\tau)$,
- (Limite radiale)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{t_0}^\infty |\partial_t v|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta &\leq \sqrt{2\pi}\int_{t_0}^\infty \Big(\int_0^{2\pi} |\partial_t v|^2\,\mathrm{d}\theta\Big)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_{t_0}^\infty \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= C\int_{t_0}^\infty \frac{|F'(t)|}{\sqrt{|F'(t)|}}\,\mathrm{d}t, \quad F(t) := \int_t^\infty f \\
&\leq C\int_{t_0}^\infty \frac{|F'(t)|}{\sqrt{F(t)}}\,\mathrm{d}t, \quad (F \leq C|F'|) \\
&= C\int_0^{F(t_0)} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} < +\infty
\end{aligned}$$

- **Merci !**