

Construction de contrôles exacts pour une équation des ondes semi-linéaire

Arthur Bottois Jérôme Lemoine Arnaud Münch

Lab. de Math. Blaise Pascal Université Clermont Auvergne

Congrès SMAI 2021



Équation des ondes semi-linéaire

- Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, et $\omega \subset \Omega$. Pour $T > 0$, on fixe $Q_T := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ et $q_T := \omega \times (0, T)$. On note $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
- On considère l'équation des ondes semi-linéaire avec contrôle interne

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \Delta y + g(y) = u \mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ (y, \partial_t y)(\cdot, 0) = (y^0, y^1) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{SL})$$

- $y = y(\mathbf{x}, t)$ est l'état du système, $u = u(\mathbf{x}, t)$ est une fonction de contrôle agissant sur ω .

Définition (contrôlabilité exacte globale)

Le système (SL) est dit *exactement contrôlable* en temps T ssi

$$\forall (y^0, y^1), (z^0, z^1) \in \mathbf{V}, \exists u \in L^2(q_T) \text{ t.q. } (y, \partial_t y)(\cdot, T) = (z^0, z^1), \text{ } y \text{ sol. de (SL).}$$

Pour (y^0, y^1) et (z^0, z^1) fixés, on qualifie de paire contrôlée la donnée (y, u) d'un contrôle u et de la solution contrôlée y associée.

Objectif général

Trouver une suite $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(y_k, u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (y, u)$ une paire contrôlée de (SL).

- On suppose $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tel que $|g(r)| \leq C(1 + |r|) \ln(2 + |r|)$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
- Pour $(y^0, y^1) \in \mathbf{V}$ et $u \in L^2(q_T)$, le système

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \Delta y + g(y) = u \mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ (y, \partial_t y)(\cdot, 0) = (y^0, y^1) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{SL})$$

admet une unique solution faible y avec $(y, \partial_t y) \in C([0, T]; \mathbf{V})$.

Théorème¹ (contrôlabilité globale)

Pour $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$, on définit $\Gamma_+ := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0\}$ et on note $\mathcal{O}_\delta(\Gamma_+)$ son δ -voisinage. On suppose $T > 2 \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ et $\mathcal{O}_\delta(\Gamma_+) \cap \Omega \subseteq \omega$ pour un certain $\delta > 0$.

Si de plus g vérifie

$$\limsup_{|r| \rightarrow \infty} \frac{|g(r)|}{|r| \ln^{1/2} |r|} = 0,$$

alors le système (SL) est exactement contrôlable en temps T .

1. Fu, Yong, Zhang – Exact controllability for multidimensional semilinear hyperbolic equations, SIAM J. Control Optim. 2007

- On définit l'opérateur $K : L^\infty(0, T; L^d(\Omega)) \rightarrow L^\infty(0, T; L^d(\Omega))$ par $K(\xi) := y$ solution de l'équation des ondes linéaire avec potentiel

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \Delta y + \widehat{g}(\xi)y = u \mathbb{1}_\omega - g(0) & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ (y, \partial_t y)(\cdot, 0) = (y^0, y^1) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad \widehat{g}(r) := \begin{cases} \frac{g(r) - g(0)}{r} & \text{si } r \neq 0, \\ g'(0) & \text{si } r = 0, \end{cases}$$

associée au contrôle u de norme $L^2(q_T)$ minimale tel que $(y, \partial_t y)(\cdot, T) = (z^0, z^1)$ dans Ω .

- L'opérateur K admet un point fixe.
- À tout point fixe y de K , on associe la paire contrôlée (y, u) de (SL).

Algorithme de point fixe

Afin de construire une paire contrôlée de (SL), on peut considérer les itérés de Picard

$$\begin{cases} y_0 \in L^\infty(0, T; L^d(\Omega)) \text{ donné,} \\ y_{k+1} = K(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cependant, K n'étant pas nécessairement contractant, une telle stratégie échoue en général.

Une approche moindres carrés

On considère l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \left\{ (y, u) \in L^2(Q_T) \times L^2(Q_T); (y, \partial_t y) \in C([0, T]; \mathbf{V}), \partial_t^2 y - \Delta y \in L^2(Q_T) \right\}$$

et les sous-espaces fermés

$$\mathcal{A} := \left\{ (y, u) \in \mathcal{H}; (y, \partial_t y)(\cdot, 0) = (y^0, y^1), (y, \partial_t y)(\cdot, T) = (z^0, z^1) \right\},$$

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ (y, u) \in \mathcal{H}; (y, \partial_t y)(\cdot, 0) = (0, 0), (y, \partial_t y)(\cdot, T) = (0, 0) \right\}.$$

Fonctionnelle moindres carrés

On définit la fonctionnelle $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$E(y, u) := \frac{1}{2} \left\| \partial_t^2 y - \Delta y + g(y) - u \right\|_{L^2(Q_T)}^2$$

et on considère le problème de minimisation (non convexe)

$$\min_{(y, u) \in \mathcal{A}} E(y, u).$$

Comme $(y, u) \in \mathcal{A}$ est une paire contrôlée de (SL) ssi c'est un zéro de E , on va chercher à construire une suite minimisante qui converge vers un zéro de E .

Une première propriété de E

La fonctionnelle E est différentiable et on note $E'(y, u) \cdot (Y, U)$ la dérivée de E au point $(y, u) \in \mathcal{A}$ dans la direction $(Y, U) \in \mathcal{A}_0$.

Proposition

$$\forall (y, u) \in \mathcal{A}, \quad \sqrt{E(y, u)} \leq \frac{C}{\sqrt{2}} \left(1 + \|g'(y)\|_{L^\infty(L^3)} \right) e^{C\|g'(y)\|_{L^\infty(L^d)}^2} \|E'(y, u)\|_{\mathcal{A}'_0}.$$

Conséquences

- Tout point critique $(y, u) \in \mathcal{A}$ de E (i.e. $E'(y, u) = 0$) est un zéro de E .
- Si $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ vérifie $\|E'(y_k, u_k)\|_{\mathcal{A}'_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ et que $\|g'(y_k)\|_{L^\infty(L^3)}$ est uniformément borné p/r à k , alors $E(y_k, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.
- Ainsi, une suite minimisante ne peut pas tomber dans un minimum local, et ce même si E n'est pas convexe.
- On va donc chercher à construire une suite minimisante $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\|g'(y_k)\|_{L^\infty(L^3)}$ reste uniformément borné par rapport à k .

Pour $(y, u) \in \mathcal{A}$, on note $(Y, U) \in \mathcal{A}_0$ la paire contrôlée* (à zéro) de l'équation des ondes linéarisée

$$\begin{cases} \partial_t^2 Y - \Delta Y + g'(y)Y = U \mathbb{1}_\omega + (\partial_t^2 y - \Delta y + g(y) - u \mathbb{1}_\omega) & \text{dans } Q_T, \\ Y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ (Y, \partial_t Y)(\cdot, 0) = (0, 0) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{LZ})$$

* on choisit la paire associée au contrôle de norme $L^2(q_T)$ minimale

Proposition

Pour tout $(y, u) \in \mathcal{A}$, la paire $(Y, U) \in \mathcal{A}_0$ vérifie l'estimation *a priori*

$$\|(Y, \partial_t Y)\|_{L^\infty(\mathbf{v})} + \|U\|_{L^2(q_T)} \leq C e^{C \|g'(y)\|_{L^\infty(L^d)}^2} \sqrt{E(y, u)}.$$

On montre également que

$$E'(y, u) \cdot (Y, U) = 2E(y, u).$$

Cette propriété implique que $-(Y, U)$ est une direction de descente pour E au point (y, u) .

Suite minimisante

On définit la suite $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (y_0, u_0) \in \mathcal{A} \text{ donné,} \\ (y_{k+1}, u_{k+1}) = (y_k, u_k) - \lambda_k(Y_k, U_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k = \arg \min_{\lambda \in [0,1]} E((y_k, u_k) - \lambda(Y_k, U_k)), \end{cases}$$

où $(Y_k, U_k) \in \mathcal{A}_0$ est la paire contrôlée de l'équation des ondes linéarisée associée à (y_k, u_k) .

Théorème (convergence forte)

On suppose que (Ω, ω, T) vérifie la condition standard d'optique géométrique. Si g' est Hölder d'exposant $s \in [0, 1]$ et vérifie

$$\exists \alpha \geq 0, \exists \beta \in [0, \beta^*(s)), \quad |g'(r)| \leq \alpha + \beta \ln^{1/2}(1 + |r|), \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

alors, pour tout $(y_0, u_0) \in \mathcal{A}$, $E(y_k, u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et la suite $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers une paire contrôlée $(y^*, u^*) \in \mathcal{A}$ de (SL).

De plus, la convergence est au moins linéaire, puis au moins d'ordre $1 + s$ après un nombre fini d'itérations.

Suite minimisante

On définit la suite $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} (y_0, u_0) \in \mathcal{A} \text{ donné,} \\ (y_{k+1}, u_{k+1}) = (y_k, u_k) - \lambda_k(Y_k, U_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k = \arg \min_{\lambda \in [0,1]} E((y_k, u_k) - \lambda(Y_k, U_k)), \end{cases}$$

où $(Y_k, U_k) \in \mathcal{A}_0$ est la paire contrôlée de l'équation des ondes linéarisée associée à (y_k, u_k) .

Lien avec l'algorithme de Newton

On a $E(y, u) = \frac{1}{2} \|F(y, u)\|_{L^2(Q_T)}^2$, avec $F(y, u) := \partial_t^2 y - \Delta y + g(y) - u \mathbb{1}_\omega$.

- On vérifie que l'algorithme de descente pour E coïncide avec l'algorithme de Newton *amorti* pour F , lequel coïncide avec l'algorithme de Newton standard quand $\lambda_k \equiv 1$.
- L'optimisation de λ_k permet donc, contrairement à l'algorithme de Newton standard, d'assurer la convergence globale de l'algorithme de descente.
- On montre aussi que $\lambda_k \rightarrow 1$ pour $k \rightarrow \infty$, ce qui explique la convergence superlinéaire de l'algorithme de descente à partir d'un certain rang.

On illustre les résultats de convergence de l'algorithme moindres carrés et on compare ses performances avec deux algorithmes de point fixe.

- On prend $\Omega = (0, 1)^2$, ω comme représenté ci-dessous et $T = 3$.
- On choisit $y^0(\mathbf{x}) = 100 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $y^1 = 0$ et $(z^0, z^1) = (0, 0)$.
- On considère la semi-linéarité $g(r) = -m_g r \ln^{1/2}(2 + |r|)$ avec m_g variable.
- On initialise avec $(y_0, u_0) \in \mathcal{A}$ la paire contrôlée de l'équation des ondes linéaire (i.e. pour $g \equiv 0$).
- La paire contrôlée (Y, U) du système linéarisé est approchée par une méthode standard² basée sur l'opérateur HUM.
- Les simulations de trajectoires de l'équation des ondes sont réalisées avec des discrétisations par différences finies en temps et par éléments finis en espace.

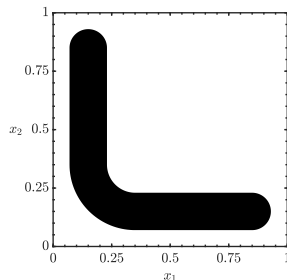


Fig. 1 – Zone de contrôle ω .

2. Glowinski, Li, Lions – A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation, Japan J. Appl. Math. 1990

#itéré k	$\sqrt{2E(y_k, u_k)}$	$\ y_k\ _{L^2(Q_T)}$	$\ u_k\ _{L^2(q_T)}$	λ_k
0	3.72×10^2	38.116	732.22	1
1	4.58×10^1	30.219	665.222	1
2	9.12×10^{-1}	30.563	734.688	1
3	1.69×10^{-4}	30.567	734.56	1
4	9.31×10^{-11}	30.567	734.559	—

Tab. 1 – Convergence de l'algorithme.

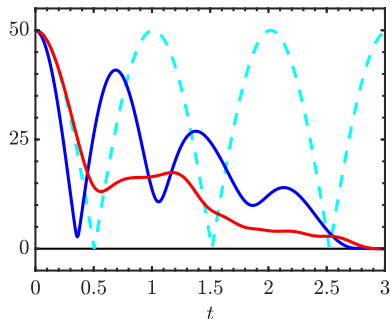


Fig. 2 – (—) $\|y^*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$;
 (—) $\|y_0(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$; (---) $\|y(\cdot, t; 0)\|_{L^2(\Omega)}$.

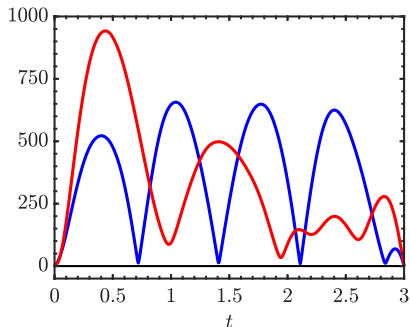


Fig. 3 – (—) $\|u^*(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$;
 (—) $\|u_0(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$.

#itéré k	$\sqrt{2E(y_k, u_k)}$	$\ y_k\ _{L^2(Q_T)}$	$\ u_k\ _{L^2(q_T)}$	λ_k
0	7.44×10^2	38.116	732.22	1
1	1.63×10^2	58.691	667.602	1
2	1.62×10^0	60.781	642.643	1
3	1.97×10^{-3}	60.745	643.784	1
4	5.11×10^{-10}	60.745	643.785	—

Tab. 2 – Convergence de l'algorithme.

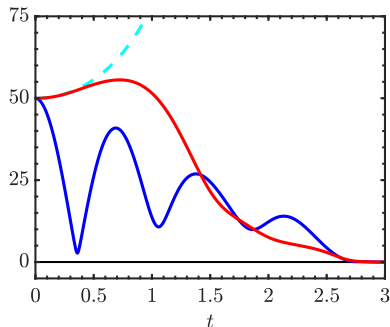


Fig. 4 – (—) $\|y^*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$;
 (—) $\|y_0(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$; (---) $\|y(\cdot, t; 0)\|_{L^2(\Omega)}$.

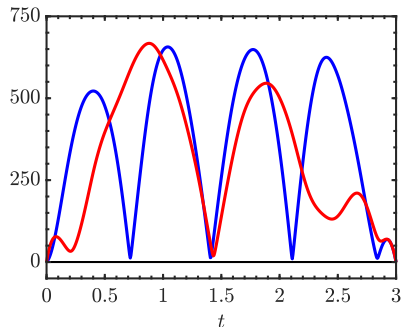


Fig. 5 – (—) $\|u^*(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$;
 (—) $\|u_0(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$.

#itéré k	$\sqrt{2E(y_k, u_k)}$	$\ y_k\ _{L^2(Q_T)}$	$\ u_k\ _{L^2(q_T)}$	λ_k
0	1.49×10^3	38.116	732.22	1
1	2.70×10^2	41.413	1474.93	0.987
2	1.65×10^1	43.041	1537.65	1
3	1.39×10^{-2}	43.071	1539.62	1
4	2.68×10^{-9}	43.071	1539.62	—

Tab. 3 – Convergence de l'algorithme.

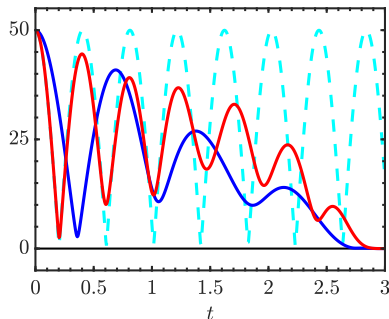


Fig. 6 – (—) $\|y^*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$;
 (—) $\|y_0(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$; (---) $\|y(\cdot, t; 0)\|_{L^2(\Omega)}$.

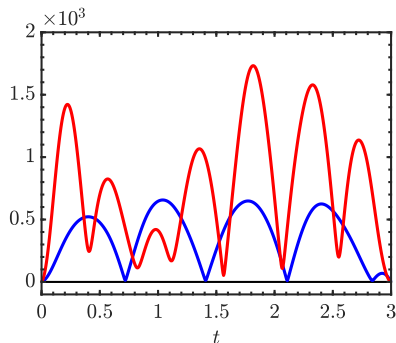


Fig. 7 – (—) $\|u^*(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$;
 (—) $\|u_0(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)}$.

Comparaison avec deux algorithmes de point fixe

On compare les performances de l'algorithme moindres carrés avec les algorithmes

$$\begin{cases} (y_0, u_0) \in \mathcal{A} \text{ donné,} \\ \partial_t^2 y_{k+1} - \Delta y_{k+1} + \widehat{g}(y_k) y_{k+1} = u_{k+1} \mathbb{1}_\omega - g(0), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (\widehat{\text{FP}})$$

$$\begin{cases} (y_0, u_0) \in \mathcal{A} \text{ donné,} \\ \partial_t^2 y_{k+1} - \Delta y_{k+1} = u_{k+1} \mathbb{1}_\omega - g(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\text{FP})$$

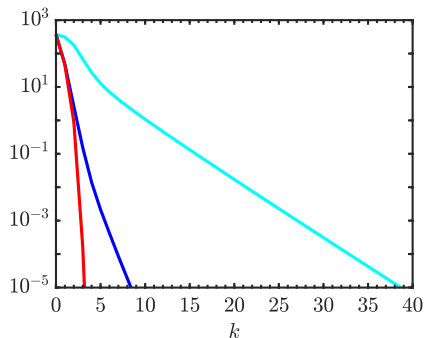


Fig. 8 – $m_g = 5$ – Décroissance de $\sqrt{2E(y_k, u_k)}$,
(—) algo. (MC); (—) algo. ($\widehat{\text{FP}}$); (—) algo. (FP).

Merci de votre attention

A. Bottois, J. Lemoine, A. Münch

Constructive exact controls for semi-linear wave equations ([preprint](#))