Convergence vers la distribution quasi-stationnaire

Bertrand Cloez
UMR INRAE-SupAgro MISTEA, Montpellier

Motivation

Processus tués

Généralités

Un théorème de Harris

Exemple

Pas de minoration

Pas d'inégalités sur les masses

Sur les fonctions de Lyapunov

Chemostat/Batch

Figure: Laboratoire de Biotechnologie de l?Environnement (Narbonne)

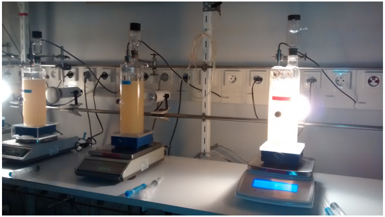
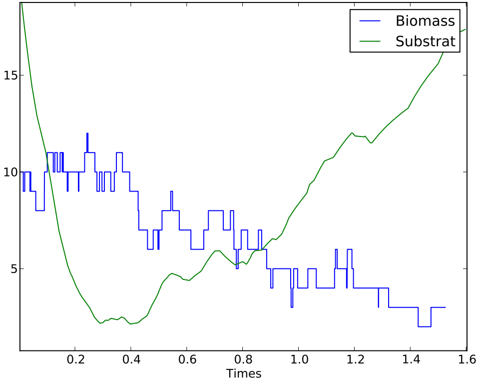


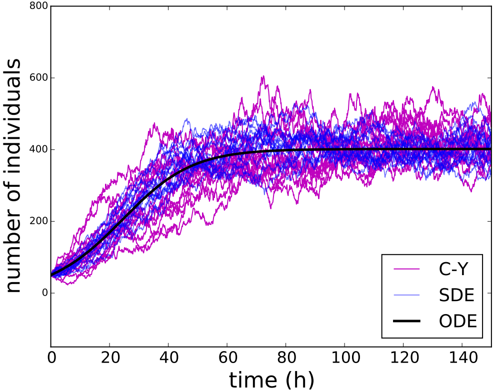
Figure: Sciences Pour l’œnologie (Montpellier)

Modèle du chemostat de Crump-Young



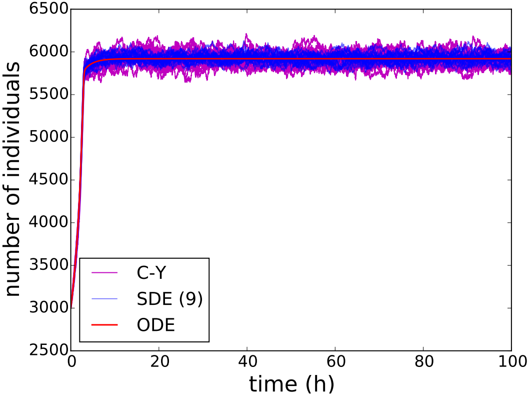
$$\mathcal{L}f(x,s) = [D(\mathrm{Sin} - s) - k\mu(s)\,x]\,\partial_s f(x,s) \\ + \mu(s)\,x\,\left(f(x+1,s) - f(x,s)\right) + D\,x\,\left(f(x-1,s) - f(x,s)\right),$$

Modèle de Crump-Young



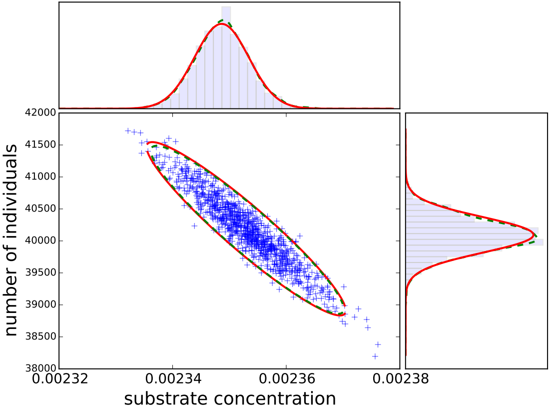
- (C., Fritsch 17)

Modèle de Crump-Young



- (C., Fritsch 17)

Modèle de Crump-Young



- (Collet, Martinez, Meleard, San Martin 12), (C., Fritsch, Soon)

Motivation

Processus tués

- Généralités
- Un théorème de Harris

Exemple

- Pas de minoration
- Pas d'inégalités sur les masses
- Sur les fonctions de Lyapunov

Processus avec extinction

- Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov

Processus avec extinction

- Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov

Processus avec extinction

- Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov
- Exemples:
  - taille de population (bactéries, insectes, poissons...)
  - population de gênes...
  - processus de Galton-Watson (sous-critique), de naissance et de mort, de Wright-Fisher...
  - processus de diffusion tué au bord d'un ensemble.

Processus avec extinction

- Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov
- Exemples:
  - taille de population (bactéries, insectes, poissons...)
  - population de gênes...
  - processus de Galton-Watson (sous-critique), de naissance et de mort, de Wright-Fisher...
  - processus de diffusion tué au bord d'un ensemble.
- Question : comportement de X_t en temps long?

Distribution quasi-stationnaire

- Le temps d'absorption est $T = \inf\{ t \geq 0 \mid X_t = 0 \}$.

Distribution quasi-stationnaire

- Le temps d'absorption est $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$.
- Pour ces modèles, on a $X_t = 0, \forall t \geq T$, et donc

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = 0.$$

Distribution quasi-stationnaire

- Le temps d'absorption est $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$.
- Pour ces modèles, on a $X_t = 0, \forall t \geq T$, et donc

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} X_t = 0.$$

- Les probabilités conditionnelles à la non-absorption sont

$$\mathbb{P}_\mu\left(X_t \in \cdot \mid t < T\right)$$

Distribution quasi-stationnaire

- Le temps d'absorption est $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$.
- Pour ces modèles, on a $X_t = 0, \forall t \geq T$, et donc

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = 0.$$

- Les probabilités conditionnelles à la non-absorption sont

$$\mathbb{P}_\mu (X_t \in \cdot \mid t < T) = \frac{\mathbb{P}_\mu (X_t \in \cdot \text{ et } X_t \neq 0)}{\mathbb{P}_\mu (X_t \neq 0)}$$

Distribution quasi-stationnaire

- Le temps d'absorption est $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$.
- Pour ces modèles, on a $X_t = 0, \forall t \geq T$, et donc

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} X_t = 0.$$

- Les probabilités conditionnelles à la non-absorption sont

$$\mathbb{P}_\mu (X_t \in \cdot \mid t < T) = \frac{\mathbb{P}_\mu (X_t \in \cdot \text{ et } X_t \neq 0)}{\mathbb{P}_\mu (X_t \neq 0)}$$

- Une distribution quasi-stationnaire (QSD) est une mesure de probabilité γ telle que pour au moins une mesure initiale μ,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu (X_t \in \cdot \mid t < T) = \gamma(\cdot).$$

Distribution quasi-stationnaire

- Une mesure γ quasi-stationnaire vérifie

$$\mathbb{P}_\gamma(t < T) = e^{-\lambda t}.$$

Distribution quasi-stationnaire

- Une mesure γ quasi-stationnaire vérifie
$$\mathbb{P}_\gamma(t < T) = e^{-\lambda t}.$$

- Si $\mathcal{L}$ est le générateur de X, c'est-à-dire
$$\mathcal{L}f(x) = \partial_t \mathbb{E}_x\left[f(X_t)\right]|_{t=0}$$
alors une QSD γ vérifie
$$\gamma\mathcal{L} = -\lambda\gamma$$

Distribution quasi-stationnaire

- Une mesure γ quasi-stationnaire vérifie

$$\mathbb{P}_\gamma(t < T) = e^{-\lambda t}.$$

- Si $\mathcal{L}$ est le générateur de X, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}f(x) = \partial_t \mathbb{E}_x\left[f(X_t)\right]|_{t=0}$$

alors une QSD γ vérifie

$$\gamma\mathcal{L} = -\lambda\gamma$$

- Exemple
  - Si l'espace d'état est fini, $\mathcal{L}$ est une matrice et (λ, γ) existe par Perron-Frobenius.
  - Pour un Mouv. Brownien tué sur un domaine D alors γ est un vect. prop. pour Δ avec des cond. de Dirichlet.

Motivation

Processus tués

- Généralités
- Un théorème de Harris

Exemple

- Pas de minoration
- Pas d'inégalités sur les masses
- Sur les fonctions de Lyapunov

Le théorème de Harris

Supposons $T = +\infty$ *p.s.*

Le théorème de Harris

Supposons $T = +\infty$ *p.s.* Si

- $\exists V \geq 1$ une fonction , et $C, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq -\alpha V + C$$

Le théorème de Harris

Supposons $T = +\infty$ *p.s.* Si

- $\exists V \geq 1$ une fonction , et $C, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq -\alpha V + C$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad \mathbb{P}_x\left(X_{t_0} \in \cdot\right) \geq \epsilon \nu.$$

Le théorème de Harris

Supposons $T = +\infty$ *p.s.* Si

- $\exists V \geq 1$ une fonction , et $C, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L} V \leq -\alpha V + C$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad \mathbb{P}_x \left(X_{t_0} \in \cdot \right) \geq \epsilon \nu.$$

alors $\exists! \pi$ loi inv. tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\sup_{|f/V| \leq 1} \left| \mathbb{E}_\mu \left[f(X_t) \right] - \pi(f) \right| \leq C e^{-\rho t} \mu(V).$$

Le théorème de Harris

Supposons $T = +\infty$ *p.s.* Si

- $\exists V \geq 1$ une fonction , et $C, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq -\alpha V + C$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad \mathbb{P}_x \left(X_{t_0} \in \cdot \right) \geq \epsilon \nu.$$

alors $\exists! \pi$ loi inv. tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\sup_{|f/V| \leq 1} \left| \mathbb{E}_\mu \left[f(X_t) \right] - \pi(f) \right| \leq C e^{-\rho t} \mu(V).$$

Voir Doeblin 40, Harris 56, Meyn-Tweedie, Hairer-Mattingly ...

Un théorème de Harris non-conservatif (Bansaye, C., Gabriel, Marguet)

Un théorème de Harris non-conservatif (Bansaye, C., Gabriel, Marguet)

- $\exists V \geq \psi > 0$ deux fonctions et $C, \beta, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq (-\beta - \alpha)V + C\psi, \quad \mathcal{L}\psi \geq -\beta\psi$$

Un théorème de Harris non-conservatif (Bansaye, C., Gabriel, Marguet)

- $\exists V \geq \psi > 0$ deux fonctions et $C, \beta, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq (-\beta - \alpha)V + C\psi, \quad \mathcal{L}\psi \geq -\beta\psi$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall f, \quad \mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0}) f(X_{t_0})\right] \geq \epsilon \nu(f) \mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0})\right].$$

Un théorème de Harris non-conservatif (Bansaye, C., Gabriel, Marguet)

- $\exists V \geq \psi > 0$ deux fonctions et $C, \beta, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq (-\beta - \alpha)V + C\psi, \quad \mathcal{L}\psi \geq -\beta\psi$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall f, \quad \mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0})f(X_{t_0})\right] \geq \epsilon\nu(f)\mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0})\right].$$

- $\exists d > 0$ tel que $\forall t \geq 0$,

$$d \sup_{x \in K} \frac{\mathbb{E}_x\left[\psi(X_t)\right]}{\psi(x)} \geq \int \left(\frac{\mathbb{E}_y\left[\psi(X_t)\right]}{\psi(y)}\right)\nu(dy)$$

Un théorème de Harris non-conservatif (Bansaye, C., Gabriel, Marguet)

- $\exists V \geq \psi > 0$ deux fonctions et $C, \beta, \alpha > 0$ tels que

$$\mathcal{L}V \leq (-\beta - \alpha)V + C\psi, \qquad \mathcal{L}\psi \geq -\beta\psi$$

- Sur $K = \{V \leq R\}$, pour $R > 0$, $\exists \nu$ une loi et $t_0, \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall f, \quad \mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0})f(X_{t_0})\right] \geq \epsilon\nu(f)\mathbb{E}_x\left[\psi(X_{t_0})\right].$$

- $\exists d > 0$ tel que $\forall t \geq 0$,

$$d \sup_{x \in K} \frac{\mathbb{E}_x\left[\psi(X_t)\right]}{\psi(x)} \geq \int \left(\frac{\mathbb{E}_y\left[\psi(X_t)\right]}{\psi(y)}\right)\nu(dy)$$

alors $\exists \gamma$ QSD, une fonction $h > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $\forall t \geq 0$,

$$\sup_{|f/V| \leq 1} \left| e^{\lambda t}\mathbb{E}_\mu\left[f(X_t)\right] - \mu(h)\gamma \right| \leq Ce^{-\rho t}\mu(V)$$

Commentaires

- Voir aussi Champagnat-Villemonais, mais aussi Del Moral, Ferré, Oçafrain, Velleret, Nummelin, Kontoyiannis-Meyn, …

Commentaires

- Voir aussi Champagnat-Villemonais, mais aussi Del Moral, Ferré, Oçafrain, Velleret, Nummelin, Kontoyiannis-Meyn, ...
- (C., Gabriel, 20) Il suffit d'avoir des fonctions de Lyapunov et

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}_x (\exists s \leq t_0, \; X_s = y) \geq \epsilon.$$

+ un partage de masse des temps d'atteinte.

Commentaires

- Voir aussi Champagnat-Villemonais, mais aussi Del Moral, Ferré, Oçafrain, Velleret, Nummelin, Kontoyiannis-Meyn, ...
- (C., Gabriel, 20) Il suffit d'avoir des fonctions de Lyapunov et

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}_x \left(\exists s \leq t_0,\ X_s = y\right) \geq \epsilon.$$

  + un partage de masse des temps d'atteinte.
- On a $\gamma(V) < +\infty$ et

$$-\beta \leq \lambda \leq -\beta - \alpha + C, \qquad \left(\frac{\psi}{V}\right)^q \psi \leq h \leq V$$

- Le résultat est une équivalence.

Motivation

Processus tués

Généralités

Un théorème de Harris

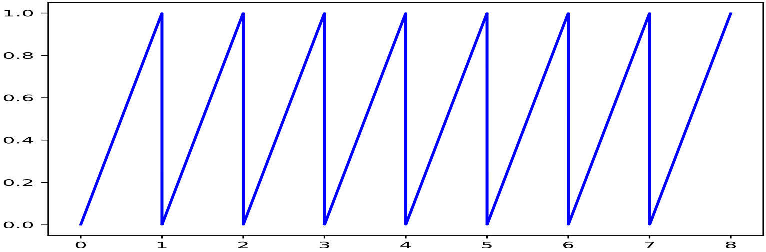
Exemple

Pas de minoration

Pas d'inégalités sur les masses

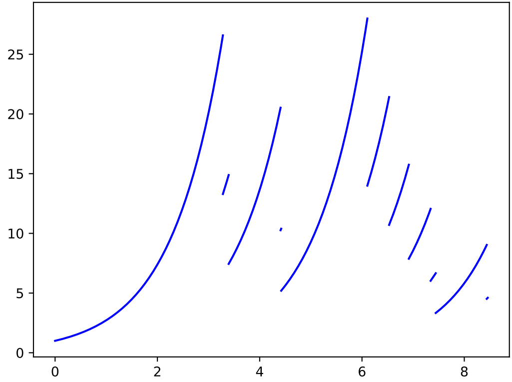
Sur les fonctions de Lyapunov

Processus périodique



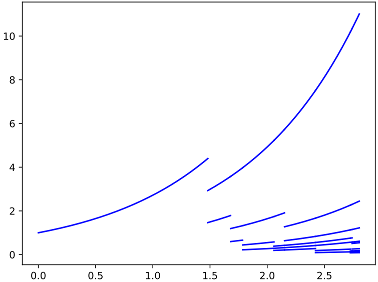
- $Lf(x) = f'(x)$ avec $f(1) = f(0)$

Processus de croissance-fragmentation



- $Lf(x) = \alpha x f'(x) + B(x)(f(\theta x) - f(x))$
- (Bernard, Doumic, Gabriel, 19), (Gabriel, Martin, 21)

Processus de branchement



- $Lf(x) = \alpha_0 x f'(x,0) + \alpha_1 x f'(x,1) + B(x)(f(\theta_0 x, 0) + f(\theta_1 x, 1) - f(x))$
- (C., de Saporta, Roger, 20)
- L'asymétrie est rentable

Motivation

Processus tués

Généralités

Un théorème de Harris

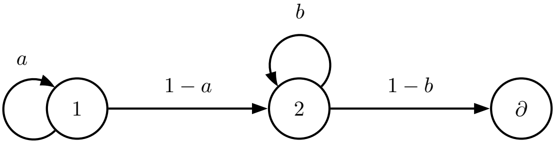
Exemple

Pas de minoration

Pas d'inégalités sur les masses

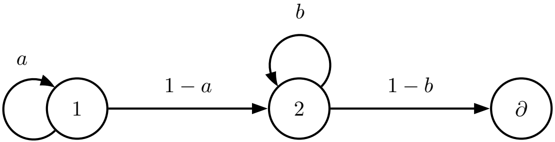
Sur les fonctions de Lyapunov

Espace à 2 points (temps discret)



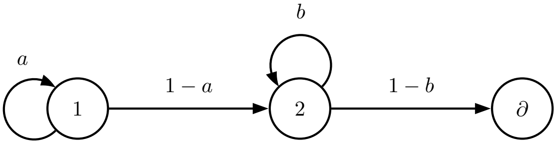
- Sur $\mathcal{E} = \{1, 2\}$, $K(1,1) = a$, $K(1,2) = 1 - a$, , $K(1,\partial) = 0$, and $K(2,1) = 0$, $K(2,2) = b$, $K(2,\partial) = 1 - b$.

Espace à 2 points (temps discret)



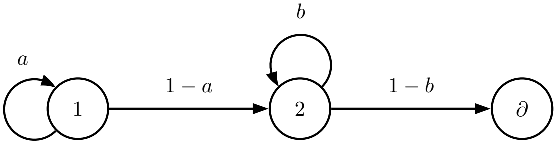
- Sur $\mathcal{E} = \{1, 2\}$, $K(1,1) = a,\ K(1,2) = 1 - a,\ ,\ K(1,\partial) = 0$, and $K(2,1) = 0,\ K(2,2) = b,\ K(2,\partial) = 1 - b$.
- Trois cas:
  - si $b > a$ alors cv expo vers l'unique QSD δ_2.

Espace à 2 points (temps discret)



- Sur $\mathcal{E} = \{1, 2\}$, $K(1,1) = a$, $K(1,2) = 1 - a$, , $K(1,\partial) = 0$, and $K(2,1) = 0$, $K(2,2) = b$, $K(2,\partial) = 1 - b$.
- Trois cas:
  - si $b > a$ alors cv expo vers l'unique QSD δ_2.
  - si $b = a$ alors cv lente (en $1/n$) vers l'unique QSD δ_2.

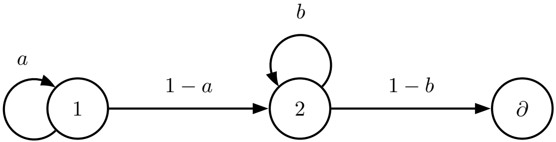
Espace à 2 points (temps discret)



- Sur $\mathcal{E} = \{1,2\}$, $K(1,1) = a$, $K(1,2) = 1-a$, , $K(1,\partial) = 0$, and $K(2,1) = 0$, $K(2,2) = b$, $K(2,\partial) = 1-b$.
- Trois cas:
  - si $b > a$ alors cv expo vers l'unique QSD δ_2.
  - si $b = a$ alors cv lente (en $1/n$) vers l'unique QSD δ_2.
  - si $b < a$ alors il y a deux QSD :

$$\gamma_1 = \frac{a-b}{1-b}\delta_1 + \frac{1-a}{1-b}\delta_2, \qquad \gamma_2 = \delta_2$$

Espace à 2 points (temps discret)



- Sur $\mathcal{E} = \{1, 2\}$, $K(1,1) = a$, $K(1,2) = 1 - a$, , $K(1, \partial) = 0$, and $K(2,1) = 0$, $K(2,2) = b$, $K(2, \partial) = 1 - b$.
- Trois cas:
  - si $b > a$ alors cv expo vers l'unique QSD δ_2.
  - si $b = a$ alors cv lente (en $1/n$) vers l'unique QSD δ_2.
  - si $b < a$ alors il y a deux QSD :

$$\gamma_1 = \frac{a-b}{1-b}\delta_1 + \frac{1-a}{1-b}\delta_2, \qquad \gamma_2 = \delta_2$$

- Plusieurs questions sur la convergence des algorithmes pour ce type de processus.

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- typiquement $q(dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}dx,\ a(x) = x^q$.
- (Kingman, 78),

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- typiquement $q(dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}dx,\ a(x) = x^q$.
- (Kingman, 78),(Bürger, 86, 88, 91) , (Coville, 10, 13), (C. Gabriel, soon)

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- typiquement $q(dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}dx,\ \ a(x) = x^q$.
- (Kingman, 78),(Bürger, 86, 88, 91) , (Coville, 10, 13), (C. Gabriel, soon)
- Si $1/\rho \leq q(1/a) = 1/\rho^*$ alors

$$h(x) = \frac{\rho}{\lambda + a(x)},\ \ \gamma = Cq(h\cdot).$$

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- typiquement $q(dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}dx,\; a(x) = x^q$.
- (Kingman, 78),(Bürger, 86, 88, 91) , (Coville, 10, 13), (C. Gabriel, soon)
- Si $1/\rho \leq q(1/a) = 1/\rho^*$ alors

$$h(x) = \frac{\rho}{\lambda + a(x)},\; \gamma = Cq(h\cdot).$$

- cas d'égalité $\Longrightarrow \lambda = 0$.

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- typiquement $q(dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}dx,\ a(x) = x^q$.
- (Kingman, 78),(Bürger, 86, 88, 91) , (Coville, 10, 13), (C. Gabriel, soon)
- Si $1/\rho \leq q(1/a) = 1/\rho^*$ alors

$$h(x) = \frac{\rho}{\lambda + a(x)},\ \gamma = Cq(h\cdot).$$

- cas d'égalité $\Longrightarrow \lambda = 0$.
- Si $\rho^* > \rho$ alors

$$\gamma(dx) = \frac{\rho}{a(x)}q(dx) + \left(1 - \frac{\rho}{\rho^*}\right)\delta_0$$

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- Si $\rho > \rho^*$ alors cv expo à taux $\rho\lambda$ en variation totale, en entropie, norme L^p...

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- Si $\rho > \rho^*$ alors cv expo à taux $\rho\lambda$ en variation totale, en entropie, norme L^p...
- Si $\rho = \rho^*$ alors $\lambda = 0$

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- Si $\rho > \rho^*$ alors cv expo à taux $\rho\lambda$ en variation totale, en entropie, norme L^p...
- Si $\rho = \rho^*$ alors $\lambda = 0$ et
  - si $q(1/a^2) < +\infty$ alors convergence sous exponentielle (typiquement polynomiale lorsque $1/a^2 \in L^p(q)$) en variation totale, en entropie, norme L^p vers $1/a(x)q(dx)$...
  - si $q(1/a^2) = +\infty$ alors convergence (très lente) vers δ_0

Modèle "château de cartes"

$$Lf(x) = \rho q(f) - a(x)f(x)$$

- Si $\rho > \rho^*$ alors cv expo à taux $\rho\lambda$ en variation totale, en entropie, norme L^p...
- Si $\rho = \rho^*$ alors $\lambda = 0$ et
  - si $q(1/a^2) < +\infty$ alors convergence sous exponentielle (typiquement polynomiale lorsque $1/a^2 \in L^p(q)$) en variation totale, en entropie, norme L^p vers $1/a(x)q(dx)$...
  - si $q(1/a^2) = +\infty$ alors convergence (très lente) vers δ_0
- Si $\rho < \rho^*$ alors $\lambda = 0$ et

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(X_t \in \cdot) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}_x(X_s \in \cdot \mid T > s)ds = \gamma.$$

Marche aléatoire

- On considère le processus (X_t) définie sur $\mathbb{N}^*$ absorbé en 0 généré par

$$\mathcal{L}f(n) = b(f(n+1) - f(n)) + d(f(n-1) - f(n))$$

avec $d > b$, pour $n \geq 2$

Marche aléatoire

- On considère le processus (X_t) définie sur $\mathbb{N}^*$ absorbé en 0 généré par

$$\mathcal{L}f(n) = b(f(n+1) - f(n)) + d(f(n-1) - f(n))$$

avec $d > b$, pour $n \geq 2$ et

$$\mathcal{L}f(1) = b_1(f(2) - f(1)) + -d_1 f(1).$$

Marche aléatoire

- On considère le processus (X_t) définie sur $\mathbb{N}^*$ absorbé en 0 généré par

$$\mathcal{L}f(n) = b(f(n+1) - f(n)) + d(f(n-1) - f(n))$$

avec $d > b$, pour $n \geq 2$ et

$$\mathcal{L}f(1) = b_1(f(2) - f(1)) + -d_1 f(1).$$

- (van Doorn 03) a montré qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\lambda t}\mathbb{P}(X_t = i)$$

converge vers une quantité positive si et seulement si

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{d}\right)^2 + b_1(\sqrt{d/b} - 1) - d_1 > 0$$

Convergence exponentielle via Harris

Convergence exponentielle via Harris

- La chaîne est irréductible donc il suffit de trouver des fonctions de Lyapunov.

Convergence exponentielle via Harris

- La chaîne est irréductible donc il suffit de trouver des fonctions de Lyapunov.
- Si $f(n) = q^n$ alors

$$\mathcal{L}f(n) = (b(q-1) + d(1/q-1))\,f(n)$$

si $n \geq 2$ et

$$\mathcal{L}f(1) = (b_1(q-1) - d_1)\,f(1)$$

Convergence exponentielle via Harris

- La chaîne est irréductible donc il suffit de trouver des fonctions de Lyapunov.
- Si $f(n) = q^n$ alors

$$\mathcal{L}f(n) = (b(q-1) + d(1/q-1))\, f(n)$$

si $n \geq 2$ et

$$\mathcal{L}f(1) = (b_1(q-1) - d_1)\, f(1)$$

- Si

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{d}\right)^2 + b_1(\sqrt{d/b} - 1) - d_1 > 0$$

alors on peut trouver $V > \psi$ de la forme $n \mapsto q^n$ satisfaisant les hypothèses.
- On trouve donc

$$\left\| \mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot \mid T > t) - \gamma \right\|_{TV} \leq C \frac{\mu(V)}{\mu(h)} e^{-\rho t}$$

Merci!