Système de particules en interaction pour l'approximation de la mesure quasi-stationnaire: cas compact avec mort douce

L. Journel
Laboratoire Jacques-Louis Lions
En collaboration avec Pierre Monmarché

$$d\bar{X}_t = b(\bar{X}_t)dt + dB_t,\ \bar{X}_t \in \mathbb{T}$$

$$d\bar{X}_t = b(\bar{X}_t)dt + dB_t,\ \bar{X}_t \in \mathbb{T}$$

$$\tau = \inf\left\{t \geqslant 0, E \leqslant \int_0^t \lambda(\bar{X}_s)ds\right\},$$

$E \sim exp(1), \lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ continu.

$$d\bar{X}_t = b(\bar{X}_t)dt + dB_t,\ \bar{X}_t \in \mathbb{T}$$

$$\tau = \inf\left\{t \geqslant 0, E \leqslant \int_0^t \lambda(\bar{X}_s)ds\right\},$$

$E \sim exp(1), \lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ continu.

$$\bar{\eta}_t = \mathbb{P}(\bar{X}_t \in \cdot | \tau > t)$$

$$d\bar{X}_t = b(\bar{X}_t)dt + dB_t,\ \bar{X}_t \in \mathbb{T}$$

$$\tau = \inf\left\{t \geqslant 0, E \leqslant \int_0^t \lambda(\bar{X}_s)ds\right\},$$

$E \sim exp(1), \lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ continu.

$$\bar{\eta}_t = \mathbb{P}(\bar{X}_t \in \cdot | \tau > t)$$

Propriété

Existence et unicité d'une mesure quasi-stationnaire ν^* pour le processus de diffusion avec mort douce.

$$\bar{\eta}_t \to \nu^*$$

Pour tout $\gamma > 0$, $N \in \mathbb{N}$.

$$(\mathbf{X}_n^{\gamma})_{n\in\mathbb{N}} = (X_n^{i,\gamma})_{1\leqslant i\leqslant N, n\in\mathbb{N}}$$

Pour tout $\gamma > 0$, $N \in \mathbb{N}$.

$$(\mathbf{X}_n^{\gamma})_{n\in\mathbb{N}} = (X_n^{i,\gamma})_{1\leqslant i\leqslant N, n\in\mathbb{N}}$$

$$\pi(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}$$

Pour tout $\gamma > 0$, $N \in \mathbb{N}$.

$$(\mathbf{X}_n^{\gamma})_{n\in\mathbb{N}} = (X_n^{i,\gamma})_{1\leqslant i\leqslant N, n\in\mathbb{N}}$$

$$\pi(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}$$

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{W}_1\left(\pi(\mathbf{X}_{\lfloor t/\gamma\rfloor}), \nu_*\right)\right) \leqslant C\left(\sqrt{\gamma} + \alpha(N) + e^{-\kappa t}\right),$$

B.Cloez-M.Thai 15

Shéma d'Euler

$$X_0 \sim \nu, \; G \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Shéma d'Euler

$X_0 \sim \nu,\ G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$X_1 = X_0 + \gamma b(X_0) + \sqrt{\gamma} G$$

Shéma d'Euler

$X_0 \sim \nu, \; G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$X_1 = X_0 + \gamma b(X_0) + \sqrt{\gamma} G$$

$X_1 \sim \nu K_\gamma$

Shéma d'Euler

$X_0 \sim \nu,\ G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$X_1 = X_0 + \gamma b(X_0) + \sqrt{\gamma} G$$

$X_1 \sim \nu K_\gamma$

$X_n = \nu K_\gamma^n$

Diffusion discrète tué

$$p(x) = 1 - e^{-\gamma\lambda(x)}$$

$U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, iid
X_n meurt si $U_n \leqslant p(X_n)$,

Diffusion discrète tué

$$p(x) = 1 - e^{-\gamma\lambda(x)}$$

$U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, iid
X_n meurt si $U_n \leqslant p(X_n)$,

$$\tau = \inf\{n\gamma,\ U_n \leqslant p(X_n)\}$$

Diffusion discrète tué

$$p(x) = 1 - e^{-\gamma\lambda(x)}$$

$U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, iid
X_n meurt si $U_n \leqslant p(X_n)$,

$$\tau = \inf\left\{n\gamma,\ U_n \leqslant p(X_n)\right\}$$

$$\tau = \inf\left\{n\gamma,\ E \leqslant \gamma\sum_{k=0}^{n}\lambda(X_k)\right\}$$

$E \sim exp(1)$

Diffusion discrète tué

$$p(x) = 1 - e^{-\gamma\lambda(x)}$$

$U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$, iid
X_n meurt si $U_n \leqslant p(X_n)$,

$$\tau = \inf\left\{n\gamma,\ U_n \leqslant p(X_n)\right\}$$

$$\tau = \inf\left\{n\gamma,\ E \leqslant \gamma\sum_{k=0}^{n}\lambda(X_k)\right\}$$

$E \sim exp(1)$

Propriété

Existence et unicité d'une mesure quasi-stationnaire ν_γ pour le processus X_n avec mort douce.

Noyau de saut

Noyau de saut

On veut définir

$$Q_{\nu}^{\gamma}(x, \cdot)$$

Noyau de saut

Noyau de saut

On veut définir

$$Q_\nu^\gamma(x,\cdot)$$

$\forall m \geqslant 1,\ \bar{X}_m \sim \nu$ iid, $G_0,\ G_m \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ iid.

$$\tilde{X}_0 = x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma} G_0$$

$$\tilde{X}_m = \bar{X}_m + \gamma b(\bar{X}_m) + \sqrt{\gamma} G_m$$

Noyau de saut

Noyau de saut

On veut définir

$$Q_\nu^\gamma(x, \cdot)$$

$$\forall m \geqslant 1,\ \bar{X}_m \sim \nu \text{ iid},\ G_0,\ G_m \sim \mathcal{N}(0, I_d) \text{ iid}.$$

$$\tilde{X}_0 = x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma} G_0$$

$$\tilde{X}_m = \bar{X}_m + \gamma b(\bar{X}_m) + \sqrt{\gamma} G_m$$

$$M = \inf \left\{ n \geqslant 0, U_m \geqslant p(\tilde{X}_m) \right\}$$

Noyau de saut

Noyau de saut

On veut définir

$$Q^{\gamma}_{\nu}(x,\cdot)$$

$$\forall m \geqslant 1,\ \bar{X}_m \sim \nu \text{ iid},\ G_0,\ G_m \sim \mathcal{N}(0, I_d) \text{ iid}.$$

$$\tilde{X}_0 = x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma} G_0$$

$$\tilde{X}_m = \bar{X}_m + \gamma b(\bar{X}_m) + \sqrt{\gamma} G_m$$

$$M = \inf\left\{n \geqslant 0, U_m \geqslant p(\tilde{X}_m)\right\}$$

$$X = \tilde{X}_M \sim Q^{\gamma}_{\nu}(x,\cdot)$$

Processus non-linéaire

$$\begin{cases} \eta_n = \mathcal{L}(Y_n) \\ Y_{n+1} \sim Q^{\gamma}_{\eta_n}(Y_n, \cdot) \end{cases}$$

Processus non-linéaire

$$\begin{cases} \eta_n = \mathcal{L}(Y_n) \\ Y_{n+1} \sim Q^{\gamma}_{\eta_n}(Y_n, \cdot) \end{cases}$$

Propriété

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \eta_n = \mathbb{P}\left(X_n \in \cdot | \tau > n\gamma\right)$$

Système de particules en interaction discret

Soit $N \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^{dN}$,

$$R_{N,\gamma}(x, \cdot) = Q^{\gamma}_{\pi(x)}(x_1, \cdot) \otimes \cdots \otimes Q^{\gamma}_{\pi(x)}(x_N, \cdot)$$

Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^{dN})$,

$$\mu_{n+1} = \mu_n R$$

Système de Fleming-Viot

$$d\bar{X}_t^i = b(\bar{X}_t^i)dt + dB_t^i,\ T_n^i \leqslant t < T_{n+1}^i$$

$$I_{i,n} \sim \mathcal{U}([1, N])$$

$$\bar{X}_{T_n^i}^i = \bar{X}_{T_n^i}^{I_{i,n}}$$

Système de Fleming-Viot

$$d\bar{X}_t^i = b(\bar{X}_t^i)dt + dB_t^i,\ T_n^i \leqslant t < T_{n+1}^i$$

$$I_{i,n} \sim \mathcal{U}([1, N])$$

$$\bar{X}_{T_n^i}^i = \bar{X}_{T_n^i}^{I_{i,n}}$$

$f : \mathbb{T}^{dN} \mapsto \mathbb{R}$.
$f^{ij}(x_1, \ldots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_j, \cdots, x_j, \cdots, x_N)$.

$$\mathcal{L}_N f(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(b(x_i).\nabla_{x_i} f + \Delta_{x_i} f + \frac{\lambda(x_i)}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(f^{ij}(x) - f(x)\right) \right)$$

$$P_{N,t} f = e^{t\mathcal{L}_N} f$$

Théorème

$\exists\, c_0, \gamma_0 = (b, d) > 0$ tel que, si λ est Lipschitz de constante L_λ tel que

$$L_\lambda e^{\gamma_0 \|\lambda\|_\infty} < c_0 \,,$$

alors il existe une distance ρ_N équivalente à $|\cdot|$ sur $\mathbb{T}^{dN}$, et $\kappa > 0$, tel que $\forall \gamma \in (0, \gamma_0]$, $N \in \mathbb{N}$, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^{dN})$,

$$\mathcal{W}_{\rho_N}(\mu R_{N,\gamma}, \nu R_{N,\gamma}) \;\leqslant\; (1 - \gamma\kappa)\mathcal{W}_{\rho_N}(\mu, \nu)\,.$$

$$
\begin{tikzcd}
R^n_{N,\gamma} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & P_{N,t} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \eta_m \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bar{\eta}_t \arrow[dd] \\
\mu_{\infty,N,\gamma} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{\mu}_{\infty,N} \arrow[dr] & \\
& \nu_\gamma \arrow[rr] & & \nu^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \gamma \to 0 \\
t \to \infty & N \to \infty
\end{tikzcd}
$$

Théorème

$\exists\, c_0, \gamma_0 = (b,d) > 0$ tel que, si λ est Lipschitz avec une constante L_λ tel que

$$L_\lambda e^{\gamma \|\lambda\|_\infty} \quad < \quad c_0\,, \tag{1}$$

alors $\exists\, C, \kappa > 0$ tel que $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $t \geqslant 0$ et $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^{dN})$, si $\mathbf{X}_n \sim \mu_0 R^n_{N,\gamma}$,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{W}_1\left(\pi\left(\mathbf{X}_{\lfloor t/\gamma \rfloor}\right), \nu_*\right)\right) \;\leqslant\; C(\sqrt{\gamma} + \alpha(N) + e^{-\kappa t})\,,$$

où

$$\alpha(N) \;=\; \begin{cases} N^{-1/2} & \text{if } d = 1\,, \\ N^{-1/2}\ln(1+N) & \text{if } d = 2\,, \\ N^{-1/d} & \text{if } d > 2\,. \end{cases}$$

$$dX_t = -\nabla U(X_t)dt + \sqrt{2\varepsilon}dB_t,$$

$U : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$.

$$dX_t = -\nabla U(X_t)dt + \sqrt{2\varepsilon}dB_t,$$

$U : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$.

$$\tau = \inf\left\{t \geqslant 0, X_t \notin D\right\},$$

$D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, borné, $\min_D U = 0$, $\min_{\partial D} U \geqslant c^*$.

Propriété

Existence et unicité d'une mesure quasi-stationnaire ν^* pour le processus de diffusion avec mort brutale.

B. Cloez and M.-N. Thai.
Quantitative results for the Fleming-Viot particle system and quasi-stationary distributions in discrete space.
Stochastic Process. Appl., 126(3) :680–702, 2016.