Une méthode numérique sur grille cartésienne pour la tomographie par impédance électrique.

Niami NASR sous la direction de Jérémi DARDÉ (IMT) et Lisl WEYNANS(IMB/INRIA).

Institut de mathématiques de Bordeaux et CARMEN INRIA

June 24, 2021

Tomographie par Impédance Electrique (EIT)
Définition

Figure: *Reconstruction non-invasive de conductivités à partir de mesures électriques sur le bord du domaine.* *From Electrical Impedance Tomography: The realisation of regional ventilation monitoring 2nd edition Eckhard Teschner Michael Imhoff Steffen Leonhardt*.

EIT: modélisation du problème direct

"Complete electrode model": ajout impédance de contact z_m.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}^M_\diamond$ tels que

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u + z_m \sigma \partial_\nu u &= U_m \text{ sur } E_m, \\ \sigma \partial_\nu u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds &= I_m. \end{cases}$$

avec E_m électrode m, z_m impédance associée, $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$ courant et

$$\mathbb{R}^M_\diamond = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^{M} I_k = 0 \right\},$$

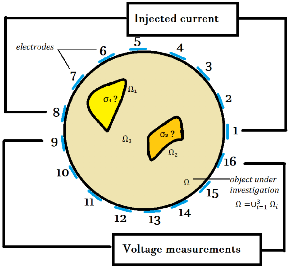


Figure: Image tirée de la thèse A. Velasco

Tomographie par Impédance Electrique (EIT)

Définition

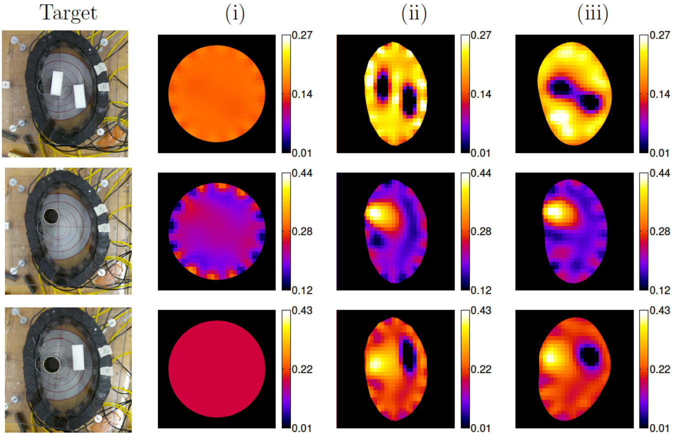
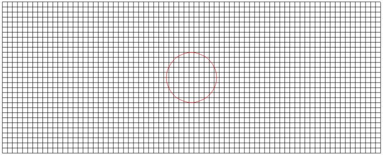


Figure: Dardé et al, SIAM J. Imaging Sci. 2013

Discrétisation dans des géométries complexes



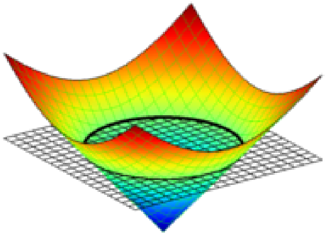
Maillage cartésien:

- Très facile à créer et manipuler,
- Facilement découpable pour faire du calcul parallèle,
- Les schémas usuels ne conviennent plus, car dans une même maille peuvent exister deux états aux propriétés différentes

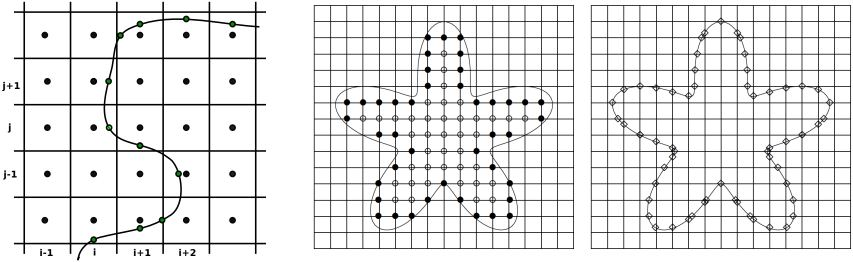
$\Rightarrow$ Développement de méthodes de "Frontières immergées"

Description de l'interface

1. Représentation implicite:
   Interface $=$ iso-ligne zéro d'une fonction régulière ϕ.
2. Pratique avec une discrétisation sur grilles cartésiennes
3. Traitement aisé de géométries complexes et changements de topologie

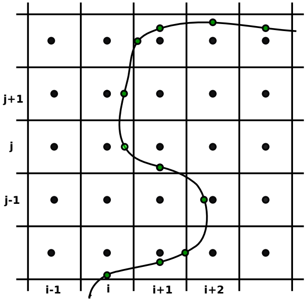


Stratégie de discrétisation



- Création d'inconnues supplémentaires sur l'interface
  - utilisées pour discrétiser l'opérateur elliptique sur le bord du domaine
  - obtenues par une discrétisation des conditions aux limites sur les flux
- Deux types de point de grille :
  - Point régulier(point loin de l'interface)
  - Point irrégulier(point de grille proche de l'interface)

$$
\begin{aligned}
-\Big(\nabla.(\sigma\nabla u)\Big)^h_{i,j} \quad &= \quad -\left(\sigma_{i+1/2,j}\frac{u_N^h-u_{ij}^h}{x_N-x_i}-\sigma_{i-1/2,j}\frac{u_{ij}^h-u_S^h}{x_i-x_S}\right)\frac{1}{h} \\
&\quad\; -\left(\sigma_{i,j+1/2}\frac{u_E^h-u_{ij}^h}{y_E-y_j}-\sigma_{i,j-1/2}\frac{u_{ij}^h-u_W^h}{y_j-y_W}\right)\frac{1}{h}.
\end{aligned}
$$



On discrétise la condition au bord à chaque point du bord $I_{i+1/2,j}$:

$$\sigma(\partial_n u)^h_{i+1/2,j} - z_m(U_m - u^h_{i+1/2,j}) = 0$$

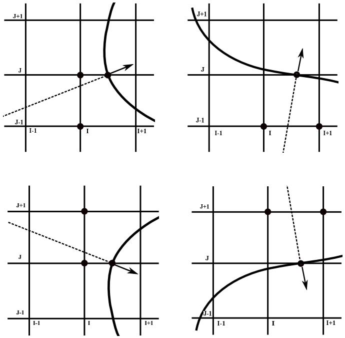


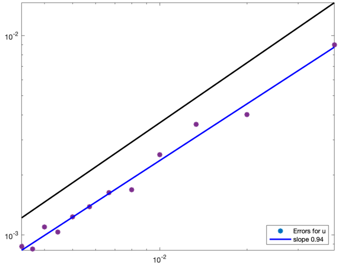
Figure: Les quatre cas possibles pour le choix de discrétisation de premier ordre du flux.

discrétiser l'integrale sur chaque électrode avec une formule de quadrature du premier ordre inspirée de Smereka donne:

$$\sum_{P \in E_m} \omega_P \zeta(U_m - u_P) = 0$$

Les poids ω_p de la formule de quadrature qui sont affectés aux points de grille dans la méthode de Smereka sont ici affectés aux points limites les plus proches. Tous les coefficients ω_p de la formule de quadrature sont positifs.

Étude de la convergence



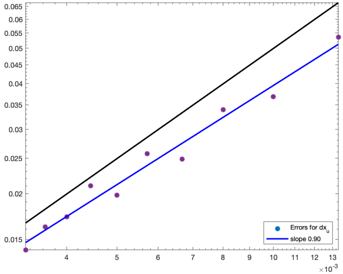


Figure: Solution de référence: $u(x, y) = e^{(x^2+y^2)}$

EIT: problème inverse

- Fonctionnelle à minimiser:

$$F(\sigma) = \frac{1}{2}\|U(I,\sigma) - U_{mes}\|^2_{\mathbb{R}^M} + \frac{\varepsilon}{2}\|\sigma - \sigma_*\|^2_{H^1(\Omega)}$$

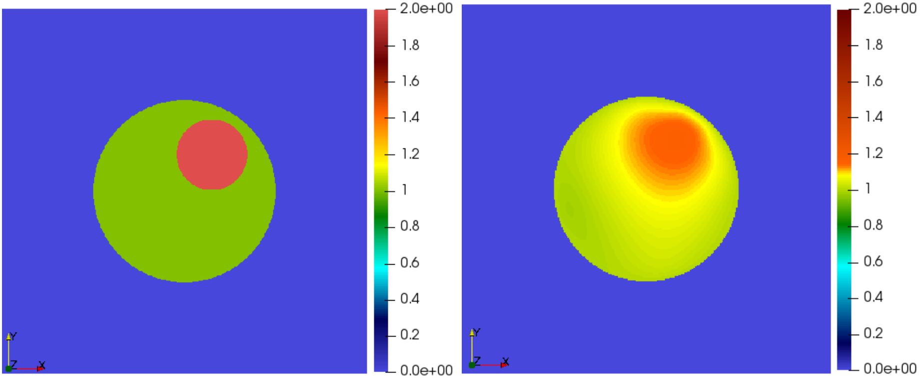
- Pour $I \in \mathbb{R}^M_\diamond$ fixé, $M : \sigma \mapsto \big(u(\sigma, I), U(\sigma, I)\big)$ est Fréchet-différentiable

$$M(\sigma + \delta\sigma) = M(\sigma) + (\delta u, \delta U) + o(\delta\sigma).$$

- On définit $\delta\sigma$ comme l'unique fonction de $H^1_0(\Omega)$ telle que $\forall\, \tilde{\sigma} \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla(\delta\sigma) \cdot \nabla\tilde{\sigma} + \delta\sigma\, \tilde{\sigma} = -\int_\Omega \mathbf{G} \cdot \nabla\tilde{\sigma} + f\, \tilde{\sigma}$$

Reconstruction de conductivités: premiers résultats avec 8 électrodes



*M*erci pour votre attention!!!

EIT: modélisation du problème direct

"Smoothened electrode model": modèle régularisé

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}^M_\diamond$ tels que

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u &= \xi (U_m - u) \text{ sur } E_m, \\ \sigma \partial_\nu u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \overline{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds &= I_m. \end{cases}$$

ξ fonction ≥ 0 sur $\partial\Omega$ vérifiant

- $\xi \equiv 0$ on $\partial\Omega \setminus \overline{E}$
- $\xi \neq 0$ sur chaque E_m

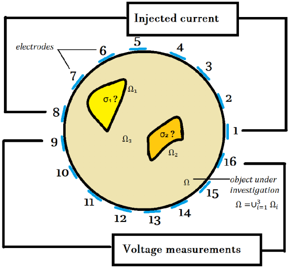


Figure: Image tirée de la thèse A. Velasco

EIT: problème inverse

- Fonctionnelle à minimiser:

$$F(\sigma) = \frac{1}{2}\|U(I,\sigma) - U_{mes}\|^2_{\mathbb{R}^M} + \frac{\varepsilon}{2}\|\sigma - \sigma_*\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- Pour $\delta\sigma \in H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta\sigma > 0$ et $t \geq 0$:

$$F(\sigma + t\delta\sigma) \approx F(\sigma) + t(\delta U, U(I_{input}, \sigma) - U_{meas})_{\mathbb{R}^M} + t\,\varepsilon(\delta\sigma, \sigma - \sigma_0)_{H^1(\Omega)}$$

- On pose

$$(w, W) = (u, U)(U(I,\sigma) - U_{mes}, \sigma)$$

On a pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M_\diamond$

$$\int_\Omega \sigma \nabla w \cdot \nabla v + \sum_m \int_{E_m} \xi(W_m - w)(V_m - v) = (U(I,\sigma) - U_{mes}) \cdot V$$

- En prenant $(v, V) = (\delta u, \delta U)$ on obtient

$$(U(I,\sigma) - U_{mes}) \cdot \delta U = -\int_\Omega \delta\sigma \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla w$$

EIT: problème inverse

- Fonctionnelle à minimiser:

$$F(\sigma) = \frac{1}{2}\|U(I,\sigma) - U_{mes}\|^2_{\mathbb{R}^M} + \frac{\varepsilon}{2}\|\sigma - \sigma_*\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- Pour $\delta\sigma \in H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta\sigma > 0$ et $t \geq 0$:

$$F(\sigma + t\,\delta\sigma) \approx F(\sigma) + t\int_\Omega \delta\sigma \underbrace{\left(\varepsilon(\sigma - \sigma_*) - \nabla u(\sigma, I)\cdot\nabla w\right)}_{f} + \nabla(\delta\sigma)\cdot\underbrace{\varepsilon\nabla(\sigma - \sigma_*)}_{\mathbf{G}}$$

- On définit $\delta\sigma$ comme l'unique fonction de $H^1_0(\Omega)$ telle que $\forall\,\tilde{\sigma} \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla(\delta\sigma)\cdot\nabla\tilde{\sigma} + \delta\sigma\,\tilde{\sigma} = -\int_\Omega \mathbf{G}\cdot\nabla\tilde{\sigma} + f\,\tilde{\sigma}$$

- On obtient

$$\int_\Omega \delta\sigma f + \nabla(\delta\sigma)\cdot\mathbf{G} = -\|\delta\sigma\|^2_{H^1(\Omega)} < 0$$