Optique géométrique pour des problèmes aux limites hyperboliques quasi-linéaires

Corentin Kilque

Institut de Mathématiques de Toulouse

Congrès SMAI
21 juin 2021

Introduction

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z)\, u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(u^\varepsilon)\, \partial_{x_j} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B\, u^\varepsilon_{|x_d=0} = \varepsilon\, g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T, \\ u^\varepsilon_{|t\leqslant 0} = 0, & \end{cases} \tag{1}$$

où

- l'espace Ω_T est défini comme $\Omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et son bord ω_T comme $\omega_T := (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$, avec $T > 0$,
- on note les variables $z = (t, x) = (t, y, x_d) \in \Omega_T = (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et $z' := (t, y) \in \omega_T = (-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ la variable de bord,
- l'inconnue u^ε est une fonction (régulière) de Ω_T dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$,
- pour tout $j = 1, \ldots, d$, A_j est une application régulière de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,
- la matrice B appartient à $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ pour un certain $M \geqslant 1$ et est de rang maximal.

Introduction

On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} L(u^\varepsilon, \partial_z)\, u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(u^\varepsilon)\, \partial_{x_j} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_T, \\ B\, u^\varepsilon_{|x_d=0} = \varepsilon\, g^\varepsilon & \text{sur } \omega_T, \\ u^\varepsilon_{|t\leqslant 0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

La dépendance en ε du système provient du terme de bord $\varepsilon\, g^\varepsilon$, où g^ε est donnée par, pour $z' \in \omega_T$,

$$g^\varepsilon(z') = G\left(z', \frac{z' \cdot \zeta_1}{\varepsilon}, \frac{z' \cdot \zeta_2}{\varepsilon}\right),$$

où G est une fonction de $H^\infty(\omega_T \times \mathbb{T}^2)$ s'annulant pour t négatif.

On cherche à construire une solution approchée de (1) en haute fréquence, c'est-à-dire lorsque $\varepsilon \to 0$, sous la forme d'un développement BKW. Plus précisément on s'attend à ce que l'on ait $u^\varepsilon \sim \varepsilon v^\varepsilon$ avec

$$v^\varepsilon(z) = U_1\Big(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon\, U_2\Big(z, \frac{\Phi(z)}{\varepsilon}\Big) + \cdots .$$

État de l'art I

- Même problème aux limites, mais avec une seule phase au bord, dans un cadre de fonctions quasi-périodiques :
  - → Mark WILLIAMS. “Singular pseudodifferential operators, symmetrizers, and oscillatory multidimensional shocks”. In : *J. Funct. Anal.* 191.1 (2002), p. 132-209,
  - → Jean-Francois COULOMBEL, Olivier GUES et Mark WILLIAMS. “Resonant leading order geometric optics expansions for quasilinear hyperbolic fixed and free boundary problems”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 36.10 (2011), p. 1797-1859,
  - → Matthew HERNANDEZ. “Resonant leading term geometric optics expansions with boundary layers for quasilinear hyperbolic boundary problems”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 40.3 (2015), p. 387-437.

État de l'art II

- Plusieurs phases au bord pour un problème semi-linéaire, dans un cadre fonctionnel presque-périodique (algèbres de Wiener) :
  - → Jean-Luc Joly, Guy Métivier et Jeffrey Rauch. "Coherent nonlinear waves and the Wiener algebra". In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 44.1 (1994), p. 167-196,
  - → Mark Williams. "Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems". In : *Comm. Partial Differential Equations* 21.11-12 (1996), p. 1829-1895.

- Plusieurs phases au bord pour le problème de Cauchy quasi-linéaire, dans un cadre de fonctions presque-périodiques (au sens de Bohr) :
  - → Jean-Luc Joly, Guy Métivier et Jeffrey Rauch. "Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics". In : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 28.1 (1995), p. 51-113.

Fréquences caractéristiques

- On remarque que, si $\alpha = (\tau, \eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, on a

$$L(0,\partial_z)\left\{U(z)\,e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon}\right\} = \left[L(0,\partial_z)\,U(z) + \frac{i}{\varepsilon}\,L(0,\alpha)\,U(z)\right]e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon},$$

avec

$$L(0,\alpha) := \tau I + \sum_{i=1}^{d-1}\eta_i A_i(0) + \xi A_d(0).$$

- Ainsi, formellement,

$$L(0,\partial_z)\left\{U(z)\,e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon}\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(0,\alpha)\,U(z) = 0 \quad \text{(polarisation)}.$$

- On dit que α est *caractéristique* si $L(0,\alpha)$ n'est pas inversible.

Ensemble de fréquences à l'intérieur du domaine

Quelles fréquences peuvent apparaitre dans la solution ?

- Les non-linéarités du problème conduisent à considérer, à partir des deux fréquences au bord ζ_1 et ζ_2, le groupe de fréquences

$$\mathcal{F}_b := \zeta_1 \,\mathbb{Z} \oplus \zeta_2 \,\mathbb{Z}$$

  au bord.

- Puisque $L(0, \partial_z)$ est hyperbolique pour ∂_t, toute fréquence $\zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\}$ est relevée en des fréquences caractéristiques réelles $\alpha = (\zeta, \xi)$, avec $\xi \in \mathbb{R}$ et des fréquences $\alpha = (\zeta, \xi)$ avec $\operatorname{Im} \xi > 0$ (couches limites).

Il y a donc une infinité dénombrable de fréquences à l'intérieur du domaine, données par l'ensemble

$$\mathcal{F} := \{0\} \cup \left\{ \alpha = (\zeta, \xi) \,\middle|\, \zeta \in \mathcal{F}_b \setminus \{0\} \right\}.$$

Dans notre problème on autorise l'existence d'une infinité dénombrable de résonances, c'est-à-dire de triplets de fréquences caractéristiques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ non colinéaires, tels que

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*, \quad \lambda_1 \,\alpha_1 + \lambda_2 \,\alpha_2 + \lambda_3 \,\alpha_3 = 0.$$

Cadre fonctionnel : fonctions presque périodiques

Il nous faut donc un cadre fonctionnel permettant de considérer une superposition d'ondes de la forme

$$a(x)\, e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon}, \quad \alpha \in \mathcal{F}.$$

On écrit, si $\alpha = (\zeta, \xi)$ avec $\zeta = n_1\zeta_1 + n_2\zeta_2 \in \zeta_1\mathbb{Z} \oplus \zeta_2\mathbb{Z}$, et $z = (z', x_d) \in \omega_T \times \mathbb{R}_+$,

$$a(x)\, e^{iz\cdot\alpha/\varepsilon} = a(x)\, e^{in_1 z'\cdot\zeta_1/\varepsilon}\, e^{in_2 z'\cdot\zeta_2/\varepsilon}\, e^{i\xi\, x_d/\varepsilon} = a(x)\, e^{in_1\,\theta_1}\, e^{in_2\,\theta_2}\, e^{i\xi\,\psi_d},$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (z'\cdot\zeta_1/\varepsilon, z'\cdot\zeta_2/\varepsilon) \in \mathbb{T}^2$ et $\psi_d := x_d/\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ les nouvelles variables rapides.

On utilise un cadre de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr. On appelle *polynôme trigonométrique* (en ψ_d) toute fonction U continue bornée de $\mathbb{R}^+_{x_d} \times \mathbb{R}^+_{\psi_d}$ dans $H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^2)$ qui s'écrit comme une somme finie

$$U(z, \theta, \psi_d) = \sum_{\xi\in\mathbb{R}} U_\xi(z, \theta)\, e^{i\,\psi_d\,\xi}.$$

Définition

L'espace des profils $\mathcal{P}_{s,T}$ est défini comme la fermeture dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+_{x_d} \times \mathbb{R}^+_{\psi_d}, H^s(\omega_T \times \mathbb{T}^2))$ de l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Ansatz et résultat principal

On cherche une solution approchée de (1) sous la forme d'une série formelle $u^{\varepsilon,\mathrm{app}}(z, z' \cdot \zeta_1/\varepsilon, z' \cdot \zeta_2/\varepsilon, x_d/\varepsilon)$, où $u^{\varepsilon,\mathrm{app}}$ est donnée par

$$u^{\varepsilon,\mathrm{app}}(z,\theta,\psi_d) := \sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^k \, U_k(z,\theta,\psi_d),$$

avec U_1 dans $\mathcal{P}_{s,T}$ et U_k une série trigonométrique formelle, pour $k \geqslant 2$.

Théorème (K. 2021)

Sous la condition de Lopatinskii uniforme et sous des hypohtèses sur l'ensemble des résonances, pour $s \geqslant 0$ suffisamment grand, il existe un temps $T > 0$ et un profil principal U_1 solution dans $\mathcal{P}_{s,T}$ du problème (2) donné plus bas, gouvernant l'évolution du profil principal.

Remarque. Ce théorème s'applique aux équations d'Euler compressibles isentropiques en dimension deux.

Système vérifié par le profil principal

Pour que $u^{\varepsilon,\text{app}}$ vérifie au sens des séries formelles le système (1), une analyse BKW formelle nous montre que le profil principal U_1 doit vérifier le système

$$\mathbf{E}\, U_1 = U_1 \tag{2a}$$

$$\mathbf{E}\Big[L(0,\partial_z)\, U_1 + \sum_{j=1}^{2} L_1(U_1,\zeta_j)\,\partial_{\theta_j} U_1 \Big] = 0 \tag{2b}$$

$$B\, U_1|_{x_d=0,\psi_d=0} = G \tag{2c}$$

$$U_1|_{t\leqslant 0} = 0, \tag{2d}$$

où $\mathbf{E}$ est un projecteur qui ne sélectionne que les fréquences caractéristiques et

$$L_1(U_1,\zeta_j) := \sum_{k=1}^{d-1} \zeta_j^k\, dA_k(0)\cdot U_1.$$

Remarque. Principale difficulté supplémentaire par rapport à [JMR 95] : absence de symétrie dans les termes de résonance.

Merci de votre attention !