

Un schéma aux différences finies linéaire pour approcher la distance de Randers sur une grille cartésienne

Guillaume Bonnet¹

Jean-Marie Mirebeau² (directeur de thèse)

Frédéric Bonnans³ (codirecteur de thèse)

¹Laboratoire de mathématiques d'Orsay ; Inria et CMAP, École Polytechnique

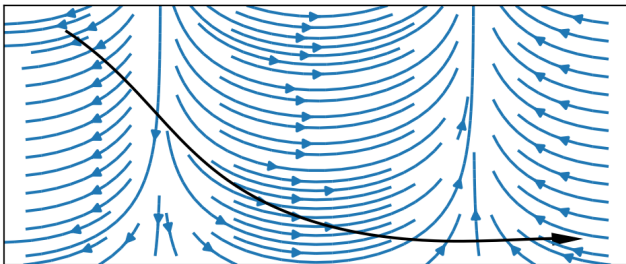
²ENS Paris-Saclay, CNRS

³Inria et CMAP, École Polytechnique

- Extension asymétrique des métriques riemanniennes ($\text{dist}(x, y) \neq \text{dist}(y, x)$).
- Exemples d'applications :
 - Relativité générale (Randers, 1941).
 - Vortex quantiques (Alama, Bronsard, Montero, 2006).
 - Segmentation d'images (Chen, Mirebeau, Cohen, 2016).
 - Chemins minimaux avec pénalisation de courbure (Chen, Mirebeau, Cohen, 2017).
 - Problème de navigation de Zermelo (Bao, Robles, Chen et al., 2004).

Problème de navigation de Zermelo

- En bleu : courants marins.
- Objectif : trouver l'itinéraire le plus rapide entre deux points.
- Distance entre les points = temps de trajet minimal.
- Asymétrique (plus rapide d'aller dans le sens du courant).



Métrie et distance de Randers — définitions

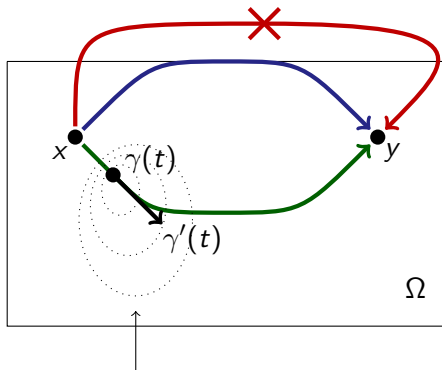
- Domaine Ω ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$.
- Métrique de Randers dans Ω :
 - Définie par $M: \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{S}_d^{++}$ champ de matrices symétriques définies positives et $\omega: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ champ de vecteurs.
 - Condition de compatibilité : $|\omega(x)|_{M(x)^{-1}} < 1$ dans $\overline{\Omega}$.
 - Cas particulier : métrique riemannienne si $\omega = 0$.
- Distance de Randers associée :

$$\text{dist}(x, y) := \inf_{\substack{\gamma: [0,1] \rightarrow \overline{\Omega} \text{ Lipschitz} \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \text{length}(\gamma)$$

où

$$\text{length}(\gamma) := \int_0^1 F_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt, \quad F_x(v) := |v|_{M(x)} + \langle \omega(x), v \rangle.$$

Métrique et distance de Randers — illustration



lignes de niveau de
 $F_{\gamma(t)}(\cdot) = |\cdot|_{M(\gamma(t))} + \langle \omega(\gamma(t)), \cdot \rangle$

Équation de la distance de Randers

- Soit $y \in \Omega$ et soit $\mathbf{u}(x) := \text{dist}(x, y)$.
- Alors $\mathbf{u}$ est solution de

$$|\nabla \mathbf{u}|_A^2 - 2\langle b, \nabla \mathbf{u} \rangle - 1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \{y\} \quad (1)$$

(où les champs $A: \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{S}_d^{++}$ et $b: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ se déduisent de M et ω par des relations algébriques simples).

- Approches possibles pour calculer $\mathbf{u}$ numériquement :
 - Résoudre (1) directement.
 - Résoudre plutôt une équation linéaire et utiliser une extension de la formule de Varadhan pour en déduire $\mathbf{u}$ (ce travail).
 - Permet d'utiliser un solveur de systèmes linéaires standard.
 - Permet de calculer les distances entre de nombreuses paires de points (préfactorisation).
 - Application naturelle au problème de transport optimal.
 - Cas riemannien : voir Crane, Weischedel, Wardetzky, 2013.

Équation linéaire — justification

- Équation linéaire à résoudre (pour $\varepsilon > 0$ petit) :

$$\begin{cases} u_\varepsilon - 2\varepsilon \langle b, \nabla u_\varepsilon \rangle - \varepsilon^2 \operatorname{Tr}(A \nabla^2 u_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \{y\}, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(y) = 1. \end{cases}$$

- Soit $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot) := -\varepsilon \log(u_\varepsilon)$ (transformation de Cole-Hopf).
- Alors $\mathbf{u}_\varepsilon$ solution de

$$|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|_A^2 - 2 \langle b, \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \rangle - \varepsilon \operatorname{Tr}(A \nabla^2 \mathbf{u}_\varepsilon) - 1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \{y\}.$$

- On retrouve (1) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, d'où $\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}$.

Schéma numérique : différences finies

- Termes à discrétiser : $\langle b(x), \nabla u(x) \rangle$ et $\text{Tr}(A(x) \nabla^2 u(x))$.

- Soit $h > 0$ et $e \in \mathbb{Z}^d$. Alors :

- Différences finies décentrées :

$$\delta_h^e u(x) := \frac{u(x + he) - u(x)}{h}, \quad \delta_h^e u(x) \approx \langle e, \nabla u(x) \rangle.$$

- Différences finies centrées :

$$\bar{\delta}_h^e u(x) := \frac{u(x + he) - u(x - he)}{2h}, \quad \bar{\delta}_h^e u(x) \approx \langle e, \nabla u(x) \rangle.$$

- Différences finies centrées d'ordre deux :

$$\Delta_h^e u(x) := \frac{u(x + he) + u(x - he) - 2u(x)}{h^2},$$
$$\Delta_h^e u(x) \approx \langle e, \nabla^2 u(x) e \rangle.$$

- (Définitions à adapter près de $\partial\Omega$.)

Schéma numérique (dimension $d \in \{2, 3\}$)

- Grille cartésienne $\Omega_h := \Omega \cap (\{y\} + h\mathbb{Z}^d)$. Schéma :

$$u_\varepsilon^h - 2\varepsilon \sum_{i=1}^l \mu_i \bar{\delta}_h^{e_i} u_\varepsilon^h - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^l \rho_i \Delta_h^{e_i} u_\varepsilon^h = 0 \quad \text{dans } \Omega_h \setminus \{y\}.$$

- Second ordre : la *décomposition de Selling* donne $\rho_i \geq 0$ et $e_i \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^l \rho_i e_i e_i^\top = A$.
 - $e_i \in \mathbb{Z}^d$ important ; $\rho_i \geq 0$ important pour garantir la monotonie (donc la stabilité) du schéma.
- Premier ordre : choisir $\mu_i := \rho_i \langle A^{-1}b, e_i \rangle$. Ainsi

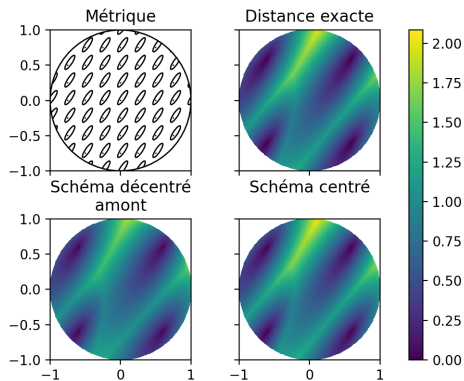
$$\sum_{i=1}^l \mu_i e_i = \sum_{i=1}^l \rho_i e_i e_i^\top A^{-1}b = AA^{-1}b = b.$$

- Discrétisation instable à cause des différences finies centrées.
 - Perte de stabilité compensée par le terme d'ordre 2 (mêmes e_i).
- Alternative : schéma décentré amont : moins bonne consistance.

Convergence

- Approximation de $\mathbf{u}$: $\mathbf{u}_\varepsilon^h := -\varepsilon \log u_\varepsilon^h$ où u_ε^h solution du schéma.
- Résultat : si $(\varepsilon, h/\varepsilon, \varepsilon \log h) \rightarrow 0$, alors $\mathbf{u}_\varepsilon^h \rightarrow \mathbf{u}$ uniformément sur les compacts de Ω .
- En appliquant la transformation logarithmique, on peut écrire le schéma (non linéaire) satisfait par $\mathbf{u}_\varepsilon^h$.
 - Consistance à l'ordre 2/3 avec l'équation (1) satisfaite par $\mathbf{u}$ (loin de $\partial\Omega$), pour $\varepsilon \propto h^{2/3}$.
 - (Pour la transformation logarithmique du schéma décentré amont : consistance à l'ordre 1/2 seulement, pour $\varepsilon \propto h^{1/2}$.)
- Les propriétés de la décomposition de Selling permettent de gérer le point isolé y du bord de $\Omega \setminus \{y\}$.

Résultats numériques — coefficients constants



$$\Omega = B_1(\mathbb{R}^2) \setminus \{(\pm 0.6, \pm 0.6)\},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix},$$

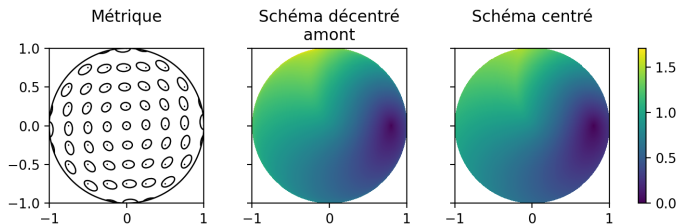
$$b(x) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.00625,$$

$$\varepsilon = 0.5h^{1/2}$$

$$\text{ou } \varepsilon = 0.5h^{2/3}.$$

Résultats numériques — coefficients variables



$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2x_2^2}{|x|} & -\frac{2x_1x_2}{|x|} \\ -\frac{2x_1x_2}{|x|} & 1 + \frac{2x_1^2}{|x|} \end{pmatrix},$$

$$b(x) = x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

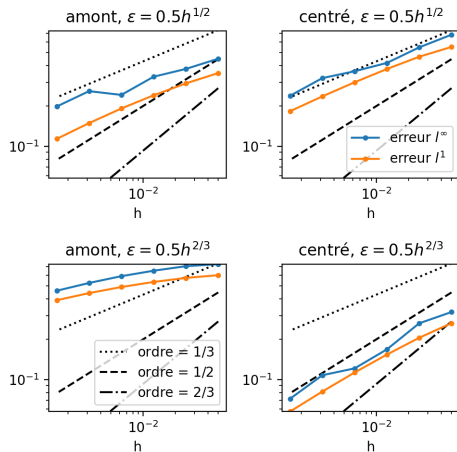
$$\Omega = B_1(\mathbb{R}^d) \setminus \{(0.8, 0)\},$$

$$h = 0.0625,$$

$$\varepsilon = 0.5h^{1/2}$$

$$\text{ou } \varepsilon = 0.5h^{2/3}.$$

Convergence — coefficients constants



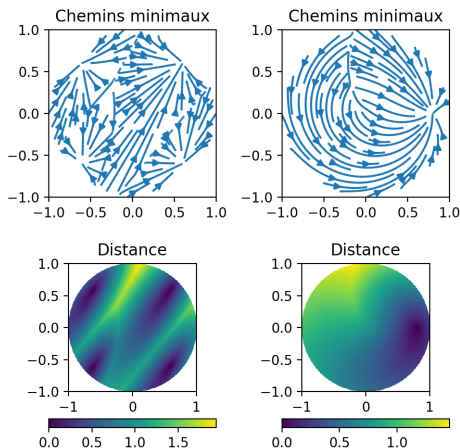
Erreur l^∞ :

$$\max_{x \in \Omega_h} |u_\varepsilon^h(x) - u(x)|.$$

Erreur l^1 :

$$h^2 \sum_{x \in \Omega_h} |u_\varepsilon^h(x) - u(x)|.$$

Résultats numériques — approximation du gradient



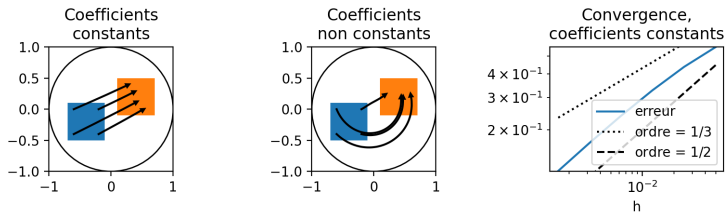
$$h = 0.00625,$$

$$\varepsilon = 0.5h^{2/3}.$$

L'approximation numérique $\nabla \mathbf{u} \approx \nabla_h \mathbf{u}_\varepsilon^h$ permet de :

- Reconstruire les chemins minimaux.
- Améliorer l'approximation de la distance (voir Crane, Weischedel, Wardetzky, 2013 dans le cas riemannien).

Résultats numériques — transport optimal



- La méthode numérique proposée pour approcher la distance de Randers est particulièrement adaptée à la résolution de problèmes de transport optimal par régularisation entropique.
 - Cas riemannien : voir Solomon, de Goes, Payré et al., 2015.
- Problème (ici) : transporter la mesure uniforme μ (en bleu) vers la mesure uniforme ν (en orange) en minimisant la moyenne sur la masse transportée de la distance de Randers parcourue.
 - Les flèches pointent vers les barycentres des mesures d'arrivée.
 - Remarque : la solution attendue *n'est pas* une translation.

■ Conclusions

- Les distances pour la métrique de Rander peuvent être approchées par un schéma numérique linéaire.
- Ce schéma converge et est consistant (loin du bord) à l'ordre deux tiers.
- Calcul efficace de distances entre de nombreuses paires de points.
- Application au calcul de distances de transport optimal entre deux mesures.
- Le schéma est une application de la décomposition de Selling.
 - Les propriétés de la décomposition de Selling permettent de gérer un bord avec un point isolé.
 - Dans d'autres travaux, nous appliquons cette décomposition aux équations de Pucci et de Monge-Ampère.
 - La décomposition peut s'étendre aux dimensions quatre et cinq.

Merci pour votre attention.