

Nouvelles conditions de coins pour la DDM en régime harmonique

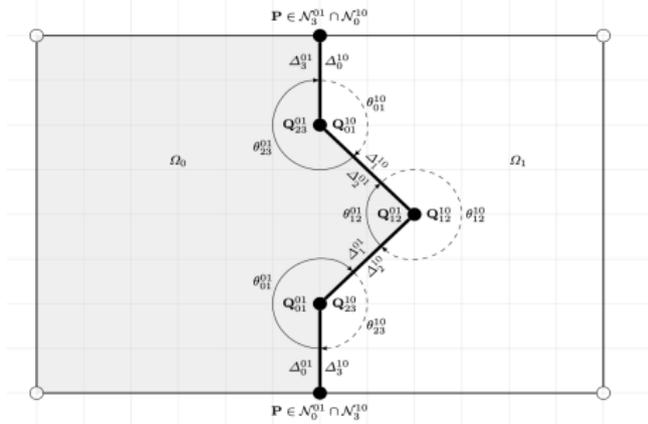
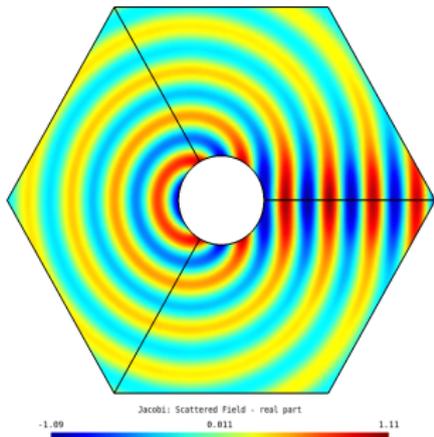
B. Després (LJLL-SU/IUF)
with A. Nicolopoulos (Postdoc ETHZ) et B. Thierry (CNRS)

Problème modèle

Résolution de l'équation de Helmholtz (ondes harmoniques $i^2 = -1$)

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0, & x \in \Omega, \\ \partial_n u - i\omega u = g, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

par des méthodes de de décomposition en sous-domaines (DDM),
avec des coins extérieurs ou internes et des conditions de transmission (TC)
d'ordre élevée dérivées de conditions absorbantes artificielles (ABC) d'ordre élevée.



Il peut y avoir des points de croisements où plus de 3 sous-domaines se rejoignent : c'est en fait le cas général du point de vue de la géométrie DDM.

Positionnement du problème

DDM : $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ et $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $j \neq i$. Interfaces droites : $\Sigma_{ij} := \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$.

Squelette interne $\Sigma = \cup_{i,j} \Sigma_{ij}$ (avec orientation) et Π opérateur d'échange.

Soit l'algorithme DDM générique : Initialiser $u_i^0 \in H^1(\Omega_i)$, puis itérer sur p

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2) u_i^{p+1} = 0 & \text{dans } \Omega_i, \forall i, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega T) u_\Sigma^{p+1} = -(\Pi \partial_n + \mathbf{i}\omega T \Pi) u_\Sigma^p & \text{sur } \Sigma, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega) u_\Gamma^{p+1} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comment choisir l'opérateur T ?

- $T = I$: D. 90', D.-Benamou 92'
- Optimisation numérique de $T = \alpha I + \beta \Delta_\Sigma$: survey Gander 2006, Dolean-Jolivet-Nataf 2015, Boubendir-Antoine-Geuzaine 2012, ..., **Thierry/Geuzaine et al (getDDM) 2016** ...
- $T = T^* = A^* A > 0$ et isomorphe $H^{\frac{1}{2}}/H^{-\frac{1}{2}}$: Joly-Ghanemi (\approx 98-00'), Lecouvez-Stupfel-Joly-Collino 2015', ...
- Formalisme multi-trace (Claeys-Hiptmair \geq 12'), puis Parolin (2020 thèse), survey Claeys-Collino-Joly-Parolin 2021, ...
- Cette présentation $T + T^* > 0$ et $T \neq T^*$.

Une idée expliquée à partir d'une ABC d'ordre élevé

- Soit u solution de l'équation de Helmholtz avec une ABC d'ordre 2

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0, & x \in \Omega = \text{patatoïde convexe académique,} \\ \partial_n u - i\omega \left(1 + \frac{1}{2\omega^2} \partial_{tt}\right) u + \frac{1}{2R} u = \tilde{g}. \end{cases}$$

Ici $\partial_n u - i\omega \tilde{T} u = \tilde{g}$ avec $\tilde{T} = T_s + iT_a$ et

$$T_s = I + \frac{1}{2\omega^2} \partial_{tt} \text{ et } iT_a = \frac{i}{2R\omega}.$$

- Considérant que $T_s = I + \text{perturbation}$, on est tenté (avec d'autres approximations) de remplacer par une autre ABC

$$\left(1 - \frac{1}{2\omega^2} \partial_{tt}\right) \partial_n u - i\omega u + \frac{1}{2R} u = \hat{g} \text{ ou encore}$$

$$\partial_n u - i\omega \left(1 - \frac{1}{2\omega^2} \partial_{tt}\right)^{-1} \left(1 + \frac{i}{\omega R}\right) u = g.$$

- A présent T est un opérateur global

$$T = \left(1 - \frac{1}{2\omega^2} \partial_{tt}\right)^{-1} \left(1 + \frac{i}{\omega R}\right)$$

avec $T \neq T^*$ (adjoint au sens L^2) et $T + T^* > 0$.

Une propriété intéressante

On a

$$- \int_{\Gamma} (T + T^*)^{-1} (\partial_n - i\omega T) u \overline{(\partial_n - i\omega T) u} d\sigma - \int_{\Gamma} (T + T^*)^{-1} (\partial_n + i\omega T^*) u \overline{(\partial_n + i\omega T^*) u} d\sigma = 0.$$

Preuve : on développe. On a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{\Gamma} (T + T^*)^{-1} (-i\omega T) u \overline{\partial_n u} d\sigma - \int_{\Gamma} (T + T^*)^{-1} (i\omega T^*) u \overline{\partial_n u} d\sigma \\ &= \operatorname{Re} \left(-i\omega \int_{\Gamma} (T + T^*)^{-1} (T + T^*) u \overline{\partial_n u} d\sigma \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(-i\omega \int_{\Gamma} u \overline{\partial_n u} d\sigma \right) = \operatorname{Re} \left(-i\omega \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \omega^2 |u|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

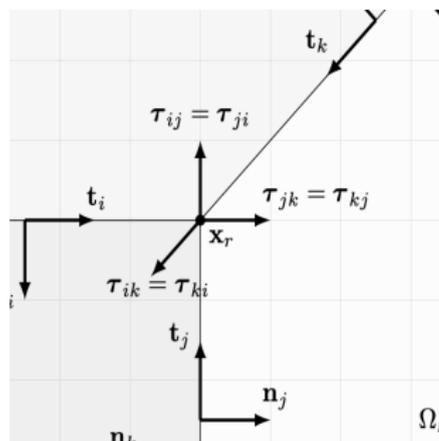
et que

$$\begin{aligned} & T^*(T + T^*)^{-1} T - T(T + T^*)^{-1} T^* \\ &= (T^* + T - T)(T + T^*)^{-1} T - T(T + T^*)^{-1} (T^* + T - T) \\ &= T - T(T + T^*)^{-1} T - T + T(T + T^*)^{-1} T = 0. \end{aligned}$$

Mise en place pour la DDM

Pour $\varphi \in H_{\text{br}}^1(\Sigma)$, on considère la collection d'opérateurs sous forme forte

$$\varphi \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2\omega^2} \partial_{t_i} t_i\right) \partial_{n_i} \varphi_{ij}, & \forall ij, \\ \partial_{t_i} \phi_{ij}(\mathbf{x}_r) + \mathbf{i} \sum_{(k,l) \in \text{Edges}} h_{ij,kl}^r \phi_{kl}(\mathbf{x}_r), & \forall i, j, r. \end{cases}$$



La forme faible correspondante posée sur Σ est

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{ij} \int_{\Sigma_{ij}} \left(\phi_{ij} \overline{\psi_{ij}} + \frac{1}{2\omega^2} \partial_{t_i} \phi_{ij} \overline{\partial_{t_i} \psi_{ij}} \right) d\sigma + \mathbf{i} \frac{1}{2\omega^2} \sum_r (H_r \phi_r, \psi_r)_{\mathbb{C}^{2d_r}}.$$

Soit $v \in L^2(\Sigma)$ et le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } \varphi \in H_{\text{br}}^1(\Sigma) \text{ tel que} \\ a(\varphi, \psi) = (v, \psi)_{L^2(\Sigma)}, \quad \forall \psi \in H_{\text{br}}^1(\Sigma). \end{cases}$$

Ce problème est bien posé, il existe une unique solution $\varphi \in H_{\text{br}}^1(\Sigma)$.

La forme forte est

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\omega^2} \partial_{t_i t_i} \phi_{ij} + \phi_{ij} = v_{ij}, & \forall ij, \\ \partial_\tau \varphi(\mathbf{x}_r) + iH^r \varphi(\mathbf{x}_r) = 0 \in \mathbb{C}^{2d_r}, & \forall r. \end{cases}$$

Definition

Soit $T: L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ l'opérateur global tel que $Tv = \varphi$.

Si la forme bilinéaire sur le squelette est dégénérée, i.e. $a(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{L^2(\Sigma)}$, alors $\varphi = v$ et $T = I$.

Il faut mettre

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2) u_i^{p+1} = 0 & \text{dans } \Omega_i, \forall i, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega T) u_\Sigma^{p+1} = -(\Pi \partial_n + \mathbf{i}\omega T \Pi) u_\Sigma^p & \text{sur } \Sigma, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega) u_\Gamma^{p+1} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

sous la forme

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2) u_i^{p+1} = 0 & \text{dans } \Omega_i, \forall i, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega T) u_\Sigma^{p+1} = -\Pi (\partial_n + \mathbf{i}\omega T^*) u_\Sigma^p & \text{sur } \Sigma, \\ (\partial_n - \mathbf{i}\omega) u_\Gamma^{p+1} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Cela revient à imposer la condition de compatibilité

$$T \Pi = \Pi T^*.$$

Auquel cas on aura la convergence de la DDM pour l'énergie

$$E^P = \int_\Sigma (T + T^*)^{-1} (\partial_n - \mathbf{i}\omega T) u^P \overline{(\partial_n - \mathbf{i}\omega T) u^P} d\sigma \leq E^{P-1} \leq \dots$$

Comment rendre cela rigoureux ?

Soit $L^2(\Sigma)$ avec la norme $\|\cdot\|$. On a

$$H_{\text{br}}^1(\Sigma) = \left\{ v \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } v|_{\Sigma_{ij}} \in H^1(\Sigma_{ij}) \text{ pour tout } i \neq j \right\}.$$

On définit l'espace fonctionnel

$$H_T^1(\Sigma) = \left\{ v \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } ((T + T^*)^{-1}v, v) < \infty \right\}.$$

A partir des vecteurs propres $(T + T^*)v_n = \lambda_n v_n$, $\lambda_n \downarrow 0$, on a aussi

$$H_T^1(\Sigma) = \left\{ v \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(v, v_n)^2}{\lambda_n \|v_n\|^2} < \infty \right\}.$$

Theorem

$H_T^1(\Sigma) = H_{\text{br}}^1(\Sigma)$ avec équivalence des normes.

Caractérisation des couplages de coins admissibles

- Des calculs montrent que $T\Pi = \Pi T^* \iff T^* = \Pi T \Pi$ est équivalent à

$$a^*(\varphi, \psi) = a(\Pi\varphi, \Pi\psi) \text{ pour tout } \varphi, \psi \in H_{\text{br}}^1(\Sigma).$$

Or

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{ij} \int_{\Sigma_{ij}} \left(\phi_{ij} \overline{\psi_{ij}} + \frac{1}{2\omega^2} \partial_{t_i} \phi_{ij} \overline{\partial_{t_i} \psi_{ij}} \right) d\sigma + i \frac{1}{2\omega^2} \sum_r (H_r \phi_r, \psi_r)_{\mathbb{C}^{2d_r}}.$$

- Les conditions de coins compatibles

$$\partial_\tau \varphi(\mathbf{x}_r) + i H^r \varphi(\mathbf{x}_r) = 0$$

sont telles que

$$\Pi_r H^r = -H^r \Pi_r \text{ avec } (H^r)^T = H^r.$$

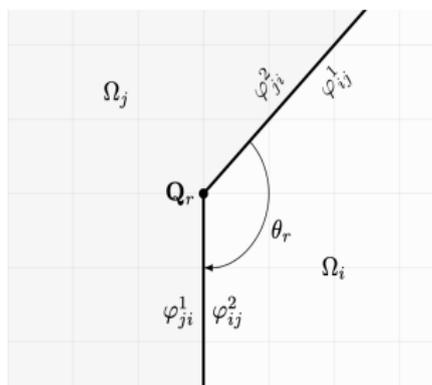
Cette condition est localisée à chaque \mathbf{x}_r .

- Avec la numérotation naturelle au coin, on a

$$\Pi_r = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2d_r}(\mathbb{C}).$$

- La solution triviale est $H^r = 0$, qui retrouve les conditions de Neumann usuelles de getDDM (Geuzaine et al).

Cas des coins internes $d_r = 2$

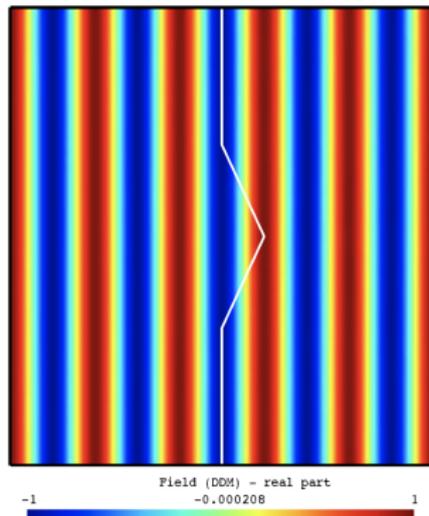
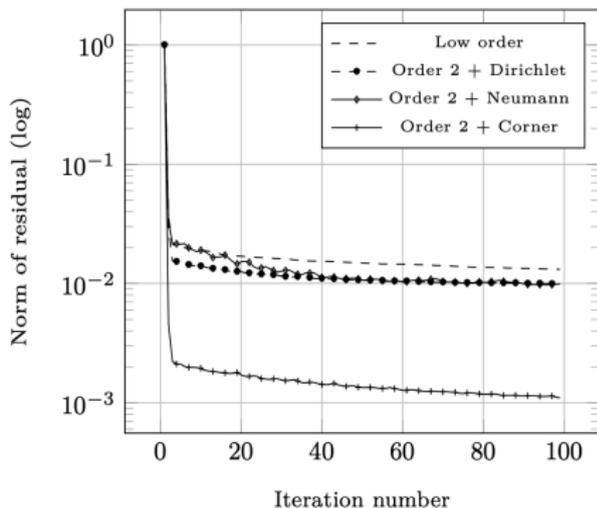


Denote $\gamma := \frac{-1}{4\omega} \left(\cos \frac{\theta_r}{2} + \frac{\cos \theta_r}{\cos(\theta_r/2)} \right)$ and $\delta := \frac{-1}{4\omega} \left(\cos \frac{\theta_r}{2} - \frac{\cos \theta_r}{\cos(\theta_r/2)} \right)$, the matrix is

$$H_r = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \delta \\ 0 & -\gamma & -\delta & 0 \\ 0 & -\delta & -\gamma & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

-
- Corners and stable optimized domain decomposition methods for the Helmholtz problem, D.-Nicolopoulos-Thierry, 20' under review.
 - On Domain Decomposition Methods with optimized transmission conditions and cross-points, D.-Nicolopoulos-Thierry, submitted.

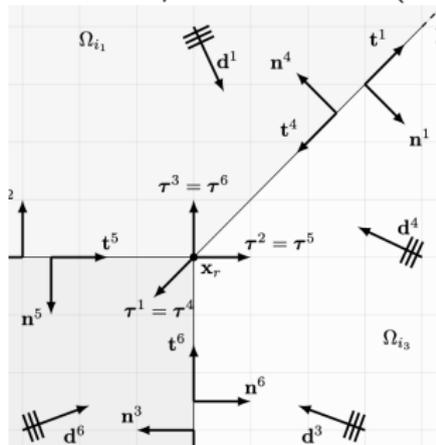
Un résultat numérique (avec GetDDM)



Ici on observe une meilleure convergence numérique, sans vrai gain asymptotique pour l'instant.

Cas général $d_r \geq 3$

Ici $d_r = 3$, $\varphi_r \in \mathbb{C}^6$ et $H^r = (H^r)^t \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. On force $\Pi_r H^r = -H^r \Pi_r$.



Pour construire un H^r non trivial, on se donne une collection d'ondes planes $u_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = e^{i\omega(\mathbf{d}, \mathbf{x})}$ (deux par sous-domaines) de directions $\mathbf{d} \in \{\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{2d_r}\}$ et on propose d'imposer

$$\partial_{\tau^n} \partial_{n^n} u_{\mathbf{d}^n} + \mathbf{i} \sum_{m=1}^{2d_r} h_{nm} \partial_{n^m} u_{\mathbf{d}^n} = 0, \quad 1 \leq n \leq 2d_r$$

$$\iff \omega(\mathbf{d}^n, \mathbf{t}^n)(\mathbf{d}^n, \mathbf{n}^n) - \sum_{m=1}^{2d_r} h_{nm}(\mathbf{d}^n, \mathbf{n}^m) = 0, \quad 1 \leq n \leq 2d_r.$$

- On peut prendre des opérateurs de transmission $T + T^* > 0$ et $T \neq T^*$, ce qui permet d'incorporer des éléments géométriques (corners/cross-points) dans les opérateurs de transmission construits à partir d'opérateurs différentiels tangents posés sur Σ
- T est global posé sur Σ .
- Les matrices de coins H^r ne sont pas uniques pour $d_r \geq 3$.
- Quid de l'implémentation pour $d_r \geq 3$? en 3D?
- Couplage ce traitement des cross-points avec des espaces mieux équilibrés $H^{\frac{1}{2}}/H^{-\frac{1}{2}}$ (multi-trace).