

Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

M. Boukraa¹, S. Amdouni², F. Delvare¹

¹LMNO, Université de Caen Normandie

²LAMSIN, ENIT, Université Tunis-El Manar

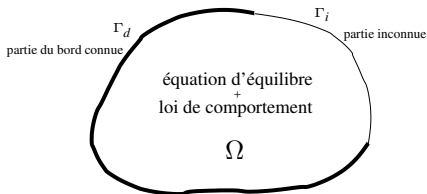
SMAI 2021, La Grande-Motte

21 au 25 juin 2021

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescente
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescence
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives

Problème inverse vs problème direct :

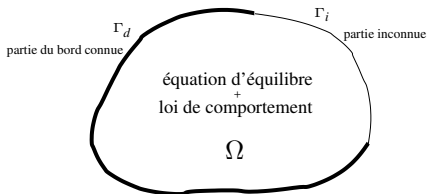


Nous connaissons :

- le domaine Ω ,
- la frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$,
- l'équation d'équilibre,
- la loi de comportement,
- les conditions aux limites (en nombre suffisant) en tout point de la frontière,
- et éventuellement, les conditions initiales.

S'il manque au moins une information : **problème inverse**.

Problème inverse vs problème direct :



Nous connaissons :

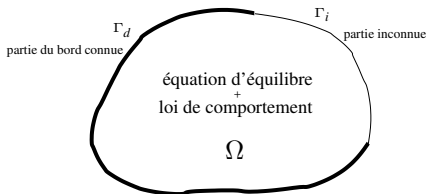
- le domaine Ω ,
- la frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$,
- l'équation d'équilibre,
- la loi de comportement,
- les conditions aux limites (en nombre suffisant) en tout point de la frontière,
- et éventuellement, les conditions initiales.

S'il manque au moins une information : **problème inverse**.

Exemples de problèmes inverses

- Identification de frontières, de cavités ou de fissures,
- Identification de paramètres matériau,
- Identification de conditions aux limites inaccessibles à la mesure,
- Identification de conditions initiales...

Problème inverse vs problème direct :



Nous connaissons :

- le domaine Ω ,
- la frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$,
- l'équation d'équilibre,
- la loi de comportement,
- les conditions aux limites (en nombre suffisant) en tout point de la frontière,
- et éventuellement, les conditions initiales.

S'il manque au moins une information : **problème inverse**.

Problème mal posé (au sens d'Hadamard)

Au moins une des conditions suivantes n'est pas satisfaite :

- existence d'une solution,
- unicité d'une solution,
- dépendance continue de la solution par rapport aux données

Problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

$$\begin{aligned}
 &\Delta^2 u = 0 \quad \forall x \in \Omega \\
 &\quad \text{ou} \\
 &\begin{cases} \Delta u = v & \forall x \in \Omega \\ \Delta v = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = \varphi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v = \mu_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \forall x \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ et $\Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$
 où $u' = \frac{\partial u}{\partial n}$ et $v' = \frac{\partial v}{\partial n}$

Problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

$$\Delta^2 u = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

ou

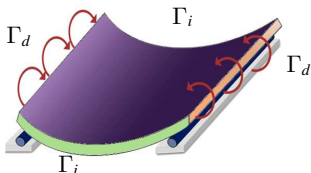
$$\begin{cases} \Delta u = v & \forall x \in \Omega \\ \Delta v = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

$$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_i \text{ et } \Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$$

$$\text{où } u' = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ et } v' = \frac{\partial v}{\partial n}$$

avec

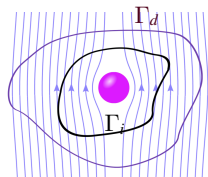
$$\begin{cases} u = \varphi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v = \mu_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \forall x \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1)$$



Flexion des plaques minces

u : la déflexion de la plaque

v : le moment de flexion



Écoulement de Stokes

u : la fonction courant

v : le tourbillon de l'écoulement du fluide

Problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

$$\Delta^2 u = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

ou

$$\begin{cases} \Delta u = v & \forall x \in \Omega \\ \Delta v = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

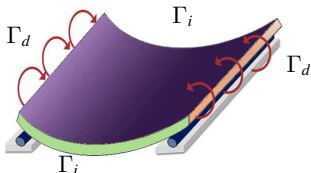
avec

$$\begin{cases} u = \varphi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v = \mu_d & \forall x \in \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \forall x \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1)$$

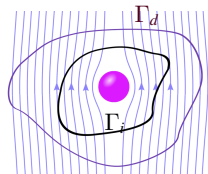
$$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_i \text{ et } \Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$$

$$\text{où } u' = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ et } v' = \frac{\partial v}{\partial n}$$

Aucune condition aux limites n'est accessible sur Γ_i



Flexion des plaques minces



Écoulement de Stokes

→ problème mal posé au sens d'Hadamard (la stabilité de la solution ne peut pas être garantie)

→ c'est un problème inverse !

→ ne peut pas être résolu par les méthodes usuelles

Exemples de méthodes de régularisation du problème inverse biharmonique

- Méthode des moindres carrés et méthode de programmation linéaire (*J. R. Cannon et M. M. Cecchi (1966)*)
Avantages : Régularisation (problème bien posé).
Inconvénients : Les données (bruitées) sont prises en compte de manière exacte.
- Méthode de Tikhonov (*L. Marin et D. Lesnic (2005) et A. Zeb, D. B. Ingham, D. Lesnic (2008)*)
Avantages : Régularisation par ajout d'un terme de contrôle (problème bien posé).
Inconvénients : La solution dépend d'un paramètre de régularisation à déterminer.
- Méthode de régularisation évanescence (*A. Eyimi Minto'o (2011)*)
Avantages : Régularisation par ajout d'un terme de contrôle (problème bien posé).
 La solution ne dépend pas d'un coefficient de régularisation.
 La physique est respectée.
 Robustesse vis-à-vis du bruit sur les données.
- ...

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescence
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives

Formulation équivalente du problème modèle

- Le problème de Cauchy biharmonique (1) est équivalent à :

Soit $\Phi_d = (\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d)$ un quadruplet de données compatibles sur Γ_d ,
(i.e. $\Phi_d \in H(\Gamma_d)$),

$$\begin{cases} \mathbf{U} = (u, u', v, v') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \mathbf{U} = \Phi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

Avec

$$H(\Gamma) = \left\{ \Phi = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \in X(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } u \in \mathcal{H}_0^2 \right. \\ \left. \text{et } (u, u', v, v') = (\varphi, \psi, \mu, \phi) \text{ avec } v = \Delta u \right\},$$

tels que

$$X(\Gamma) = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

et

$$\mathcal{H}_0^2 = \{u \in H^2(\Omega) \quad / \quad \Delta^2 u = 0\}.$$

La méthode de régularisation évanescence

Cimetière et al. (2000,2001), Delvare (2000)

Idée de base : Rechercher la solution de l'équation d'équilibre dans Ω qui s'approche au mieux des données sur Γ_d , avec :

- indépendance par rapport à un coefficient de régularisation,
- stabilité vis à vis du bruit sur les données,

La méthode de régularisation évanescence

Cimetière et al. (2000,2001), Delvare (2000)

Idée de base : Rechercher la solution de l'équation d'équilibre dans Ω qui s'approche au mieux des données sur Γ_d , avec :

- indépendance par rapport à un coefficient de régularisation,
- stabilité vis à vis du bruit sur les données,

1^{ère} intuition

$$\text{Minimiser } \|\mathbf{V} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2, \quad \mathbf{V} \in H(\Gamma)$$

✗ Problème mal posé !

La méthode de régularisation évanescence

Cimetière et al. (2000,2001), Delvare (2000)

Idée de base : Rechercher la solution de l'équation d'équilibre dans Ω qui s'approche au mieux des données sur Γ_d , avec :

- indépendance par rapport à un coefficient de régularisation,
- stabilité vis à vis du bruit sur les données,

Méthode de régularisation évanescence

$$\mathbf{U}^{k+1} = \underset{\mathbf{V} \in H(\Gamma)}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \|\mathbf{V} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 \right\}$$

- ✓ Une suite de problèmes d'optimisation bien posés,
- ✓ L'accord aux données s'effectue au mieux (relaxation des données),
- ✓ Indépendance de la solution par rapport à c ,
- ✓ Algorithme convergent.

- L'algorithme itératif de la méthode de régularisation évanescence :

Soit $c > 0$ et $\mathbf{U}^0 \in H(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 \text{ pour } \mathbf{V} \in H(\Gamma) \end{array} \right. \quad (2)$$

Lemme

À l'itération k , le problème (2) a une unique solution $\mathbf{U}^{k+1}$ caractérisée par :

$$\langle \mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma_d} + c\langle \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \quad (3)$$

- La fonctionnelle J_c^k est continue et strictement convexe sur $H(\Gamma)$
 - $\lim_{\|\mathbf{V}\|_{\Gamma} \rightarrow +\infty} J_c^k(\mathbf{V}) = +\infty$
- J_c^k admet un unique minimum caractérisé par l'équation d'optimalité (3).

Convergence de la formulation continue

Théorème

Si Φ_d est un quadruplet de données compatibles (i.e. un élément de $H(\Gamma_d)$), associé à la solution compatible $\mathbf{U}_e$ du problème de Cauchy (1), alors la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ définie par l'algorithme itératif (2) est telle que :

$$\mathbf{U}^k \rightarrow \Phi_d \quad \text{dans} \quad H(\Gamma_d) \quad \text{au sens fort} \quad (4)$$

$$\mathbf{U}^k \rightharpoonup \mathbf{U}_e \quad \text{dans} \quad H(\Gamma) \quad \text{au sens faible} \quad (5)$$

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescente
- 3 Le problème biharmonique factorisé**
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives

Le problème biharmonique factorisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

Choix des espaces fonctionnels :

$$\mathcal{H}_v(\Gamma) = \{\mathbf{V} = (\mu, \phi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \mid \exists w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \mu, \quad w' = \phi\},$$

et pour tout $v \in \mathcal{H}_v(\Gamma)$,

$$\mathcal{H}_u(\Gamma, v) = \{\mathbf{U} = (\varphi, \psi) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \mid \exists w \in \mathcal{H}^2(\Omega, v), \quad w|_{\Gamma} = \varphi, \quad w' = \psi\}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid -\Delta v = 0 \text{ on } \Omega\} \\ \mathcal{H}^2(\Omega, v) &= \{u \in H^2(\Omega) \mid -\Delta u = v \text{ on } \Omega\}. \end{aligned}$$

Le problème biharmonique factorisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

Une formulation équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{V} = (v, v') \in \mathcal{H}_v(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{V} = \Phi_d \text{ sur } \Gamma_d, \end{array} \right.$$

où $\Phi_d = (\mu_d, \phi_d)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} = (u, u') \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v) \text{ tel que} \\ \mathbf{U} = \Psi_d \text{ on } \Gamma_d, \end{array} \right.$$

où $\Psi_d = (\varphi_d, \psi_d)$.

Le problème biharmonique factorisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

Soient $c_1 > 0$ et $\mathbf{V}^0 \in \mathcal{H}_v(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{V}^{k+1} \in \mathcal{H}_v(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{V}^{k+1}) \leq J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{W}), \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{H}_v(\Gamma), \quad \forall k \geq 0, \\ \text{où } J_{c_1}^{k+1}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c_1 \|\mathbf{W} - \mathbf{V}^k\|_{\Gamma}^2. \end{array} \right.$$

On définit $\mathbf{V}_{\text{opt}} \equiv (v_{\text{opt}}, v'_{\text{opt}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{V}^{k+1}$.

Soient $c_2 > 0$ et $\mathbf{U}^0 \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}}) \text{ tel que} \\ J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{W}), \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{H}_u(\Gamma, v_{\text{opt}}), \\ \text{où } J_{c_2}^{k+1}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}|_{\Gamma_d} - \Psi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c_2 \|\mathbf{W} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2, \end{array} \right.$$

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescence
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème factorisé approché :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8b)$$

- Soit $\mathcal{T}_h$ une discrétisation du domaine Ω telle que :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\Upsilon \in \mathcal{T}_h} \Upsilon,$$

- Espaces d'approximation :

Si $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $v' \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$V^h(\Omega) = \{w^h \in C^0(\Omega), \quad w|_{\Upsilon} \in P_k(\Upsilon), \quad \forall \Upsilon \in \mathcal{T}_h\} \rightsquigarrow H^1(\Omega)$$

$$V^h(\Gamma) = V^h(\Omega)|_{\Gamma} \rightsquigarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

$$W^h(\Gamma) = V^h(\Gamma) \rightsquigarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

$\Rightarrow$ Raisonnement similaire pour le problème (8b).

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème factorisé approché :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8b)$$

- Espaces d'approximation :

$$\mathcal{H}_v^h(\Gamma) = \left\{ (\vartheta^h, \xi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \mid \exists w^h \in V^h(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \vartheta^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla w^h \nabla \nu d\Omega - \int_{\Gamma} \xi^h \nu d\sigma = 0 \, d\Omega, \quad \forall \nu \in V^h(\Omega) \right\},$$

$$\mathcal{H}_u^h(\Gamma, v) = \left\{ (\varphi^h, \psi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \mid \exists w^h \in V^h(\Omega), \quad w|_{\Gamma} = \varphi^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla w^h \nabla \nu d\Omega - \int_{\Gamma} \psi^h \nu d\sigma = \int_{\Omega} \psi^h v^h \, d\Omega, \quad \forall \nu \in V^h(\Omega) \right\}.$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème factorisé approché :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8b)$$

- Espaces des solutions discrètes :

$$\mathbb{H}_v^h(\Gamma) = \{\underline{\mathbf{V}} = (\underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \mid \Xi(\underline{V}, \underline{V}') \equiv K\underline{V} + B\underline{V}' = 0\},$$

et pour $\underline{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}_v^h(\Gamma)$,

$$\mathbb{H}_u^h(\Gamma, \underline{V}) = \{\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \mid \Lambda(\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}) \equiv K\underline{U} + B\underline{U}' - D\underline{V} = 0\}.$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème factorisé approché :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega \\ v = \mu_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = v, & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d, & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8b)$$

- Formulation éléments finis de l'algorithme de régularisation évanescence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (V^{k+1}, V'^{k+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_c^{\phi_d}(V^{k+1}, V'^{k+1}) \leq J_c^{\phi_d}(V, V'), \quad \forall (V, V') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \\ \text{sous les contraintes égalités : } KV + BV' = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (U^{j+1}, U'^{j+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_c^{\varphi_d}(U^{j+1}, U'^{j+1}) \leq J_c^{\varphi_d}(U, U'), \quad \forall (U, U') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \\ \text{sous les contraintes égalités : } KU + BU' = DV^{k+1} \end{array} \right.$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème biharmonique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

• Espace d'approximation

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(\Gamma) = \left\{ \Phi^h = (\varphi^h, \psi^h, \mu^h, \phi^h) \in V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \times V^h(\Gamma) \times W^h(\Gamma) \right. \\ \left. \mid \exists (u^h, v^h) \in V^h(\Omega) \times V^h(\Omega), \quad u^h|_{\Gamma} = \varphi^h, \quad v^h|_{\Gamma} = \mu^h, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla u^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} \psi^h w^h d\sigma = \int_{\Omega} v^h w^h d\Omega, \quad \forall w^h \in V^h(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla v^h \nabla w^h d\Omega - \int_{\Gamma} \phi^h w^h d\sigma = 0 d\Omega, \quad \forall w^h \in V^h(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème biharmonique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

- Espaces des solutions discrètes :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^h(\Gamma) = \{ \underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \mid \\ \Xi(\underline{V}, \underline{V}') \equiv K\underline{V} + B\underline{V}' = 0, \\ \Lambda(\underline{U}, \underline{U}', \underline{V}) \equiv K\underline{U} + B\underline{U}' - D\underline{V} = 0 \}. \end{aligned}$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème biharmonique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

- Formulation éléments finis de l'algorithme de régularisation évanescence :
Soient $c > 0$ et $\underline{\mathbf{U}}^0 = (0, 0, 0, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathbf{U}}^{k+1} = (\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}'^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}'^{k+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que} \\ J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}), \quad \forall (\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}) \in \mathbb{H}^h(\Gamma), \\ \text{sous les contraintes égalités : } \mathcal{E}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}) = 0, \end{array} \right.$$

$$\mathcal{E}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{T}}) \equiv \begin{bmatrix} K & -D \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{W}} \\ \underline{\mathbf{S}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\mathbf{P} \\ B\mathbf{T} \end{bmatrix}.$$

Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis

Le problème biharmonique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ v' = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

- Résolution de l'algorithme itératif :

Soient $c > 0$ et $\underline{\mathbf{U}}^0 = (0, 0, 0, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}^{\prime k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{\prime k+1}, \underline{\lambda}^{k+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ \nabla J_c^{k+1}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}^{\prime k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{\prime k+1}) + (\underline{\eta}^{k+1})^t \nabla \mathcal{E}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}^{\prime k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{\prime k+1}) = 0, \\ \mathcal{E}(\underline{\mathbf{U}}^{k+1}, \underline{\mathbf{U}}^{\prime k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{k+1}, \underline{\mathbf{V}}^{\prime k+1}) = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \nabla J_c^{k+1} & \nabla \mathcal{E}^T \\ \nabla \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}^{k+1} \\ \underline{\eta}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}^k \\ \underline{0} \end{bmatrix}.$$

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescence
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques**
- 6 Conclusion et perspectives

Résultats numériques

Données bruitées

$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_d :$

$$\begin{cases} \varphi_d(\mathbf{x}) = u_{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u_{an}(\mathbf{x})).\rho, \\ \psi_d(\mathbf{x}) = u'_{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(u'_{an}(\mathbf{x})).\rho, \\ \mu_d(\mathbf{x}) = v_{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v_{an}(\mathbf{x})).\rho, \\ \phi_d(\mathbf{x}) = v'_{an}(\mathbf{x}) + \delta \max(v'_{an}(\mathbf{x})).\rho, \end{cases}$$

Termes de Contrôle

- Terme de relaxation

$$J_{\Gamma_d}^{k+1}(\mathbf{U}) = \|\mathbf{U}^{k+1}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2$$

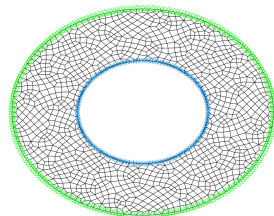
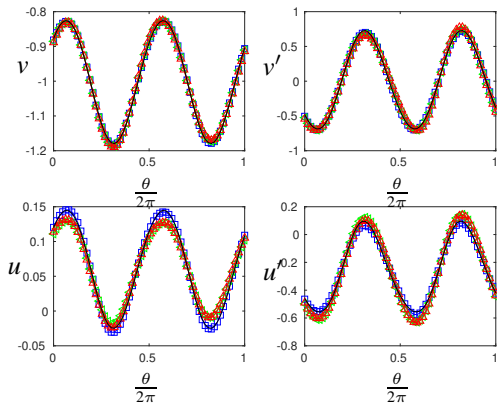
- Terme de régularisation

$$J_{\Gamma}^{k+1}(\mathbf{U}) = c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2$$

- La valeur de la fonctionnelle

$$J_c^{k+1}(\mathbf{U}) = \|\mathbf{U}^{k+1}|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{H(\Gamma_d)}^2 + c\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{H(\Gamma)}^2$$

Reconstruction de la solution du problème biharmonique factorisé



* inconnues

◁ données

maillage QUAD8

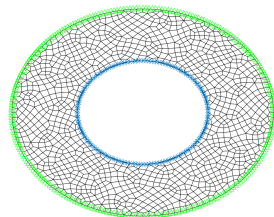
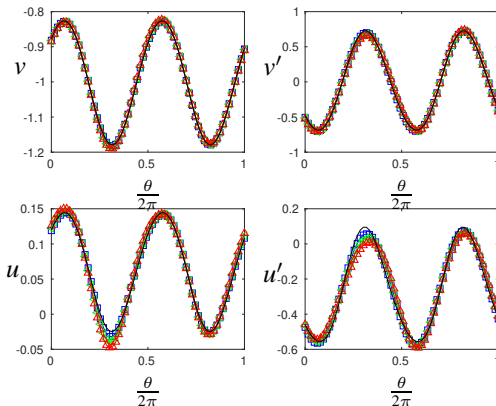
$h = 1/20$

□ : $\delta = 1\%$ et $c = 10^{-1}$
 $c = 10.$

◁ : $\delta = 3\%$ et $c = 1$

△ : $\delta = 5\%$ et

Reconstruction de la solution du problème biharmonique



* inconnues
 ◁ données
 maillage QUAD8
 $h = 1/20$

□ : $\delta = 1\%$ et $c = 1$

◁ : $\delta = 3\%$ et $c = 10$

△ : $\delta = 5\%$ et $c = 10$.

Évolution des erreurs en norme L^2 pour différentes valeurs de c à $\delta = 3\%$ de bruit

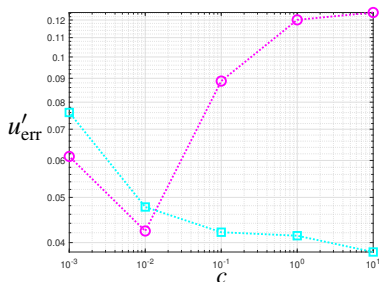
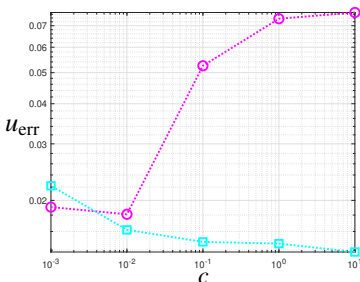
- Le problème biharmonique factorisé

c	k_{opt}^v	v_{err}	v'_{err}	k_{opt}^u	u_{err}	u'_{err}
10	1851	2.12×10^{-3}	3.25×10^{-2}	15930	1.44×10^{-2}	3.79×10^{-2}
1	182	2.12×10^{-3}	3.25×10^{-2}	172	1.43×10^{-2}	3.80×10^{-2}
10^{-1}	20	2.20×10^{-3}	3.27×10^{-2}	18	1.45×10^{-2}	3.83×10^{-2}
10^{-2}	3	2.52×10^{-3}	3.39×10^{-2}	4	1.51×10^{-2}	4.07×10^{-2}
10^{-3}	2	3.30×10^{-3}	4.30×10^{-2}	2	1.90×10^{-2}	6.09×10^{-2}
10^{-4}	2	5.81×10^{-3}	8.55×10^{-2}	2	2.74×10^{-2}	1.10×10^{-1}

- Le problème biharmonique

c	k_{opt}	v_{err}	v'_{err}	u_{err}	u'_{err}
10	1507	2.28×10^{-3}	3.29×10^{-2}	1.36×10^{-2}	3.69×10^{-2}
1	149	2.30×10^{-3}	3.29×10^{-2}	1.36×10^{-2}	3.69×10^{-2}
10^{-1}	140	2.57×10^{-3}	3.36×10^{-2}	1.39×10^{-2}	3.71×10^{-2}
10^{-2}	4	2.49×10^{-3}	3.40×10^{-2}	1.48×10^{-2}	4.04×10^{-2}
10^{-3}	1	3.58×10^{-3}	3.76×10^{-2}	1.73×10^{-2}	4.97×10^{-2}
10^{-4}	1	4.58×10^{-3}	6.35×10^{-1}	2.35×10^{-2}	8.58×10^{-1}

Comparaison des erreurs commises sur u et u' en appliquant le critère d'arrêt lié à la fonctionnelle J_c des deux formulations en fonction de c

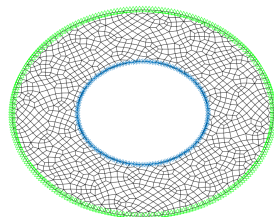
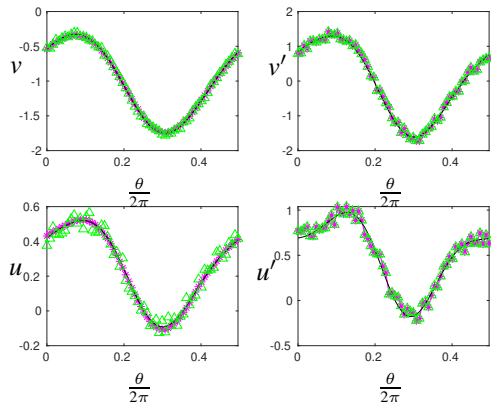


... ○ ... : Le problème biharmonique factorisé

... □ ... : Le problème biharmonique

$$\delta = 3\%$$

Débruitage des données sur Γ_d



* inconnues

◁ données

maillage QUAD8

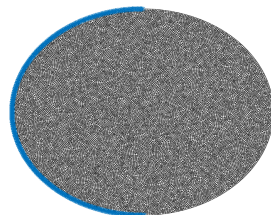
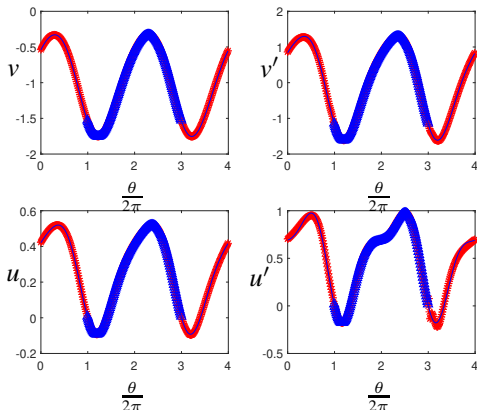
$h = 1/20$

△ : $\delta = 10\%$

— * — : La reconstruction

— : La solution analytique.

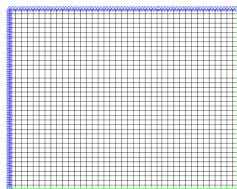
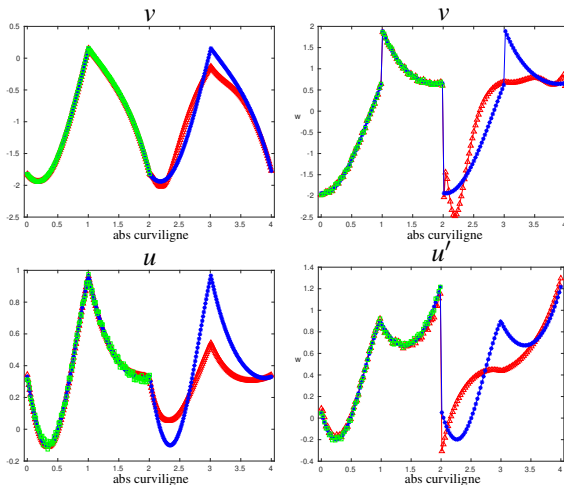
Reconstruction de la solution sur la frontière d'un disque



* données
 $h = 1/80$

$\triangle$: données non bruitées $- * -$: La reconstruction $-$: La solution analytique.

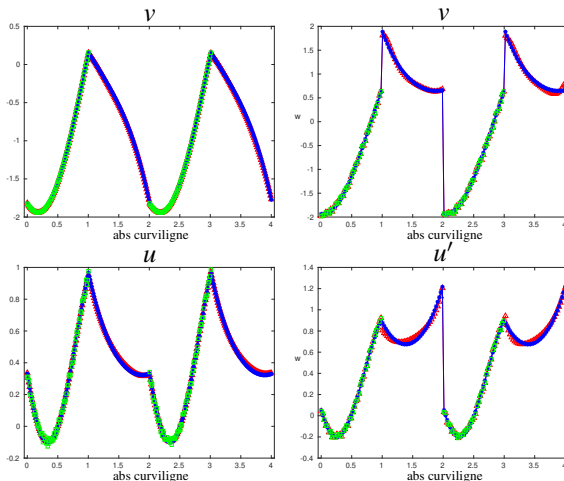
Reconstruction de la solution sur le bord d'un carré



* inconnues
 ◁ données
 maillage QUAD8
 $h = 1/20$

◁ : Données bruitées $\delta = 3\%$ ▷ : La reconstruction — * — : La solution analytique.

Reconstruction de la solution sur le bord d'un carré



* inconnues
 ◁ données
 maillage QUAD8
 $h = 1/20$

◁ : Données bruitées $\delta = 3\%$ ▷ : La reconstruction — * — : La solution analytique.

- 1 Problème inverse
- 2 Méthode de régularisation évanescence
- 3 Le problème biharmonique factorisé
- 4 Mise en oeuvre numérique par la méthode des éléments finis
- 5 Résultats numériques
- 6 Conclusion et perspectives**

Conclusion et perspectives

- La méthode de régularisation évanescence :
 - Capable de débruiter les données
 - Robuste (stable) vis à vis du bruit sur les données
 - Qui n'est pas spécifique à un opérateur
- L'implémentation par la méthode des éléments finis :
 - Permet d'approximer la solution biharmonique en utilisant deux formulations différentes du problème de Cauchy
 - Permet de reconstruire parfaitement la solution sur la frontière d'un domaine régulier
 - Rencontre des difficultés de reconstruction sur une frontière d'un domaine non régulier, en particulier lorsque les coins sont situés dans la partie inconnue
- Développement en cours :
 - Résolution du problème biharmonique en théorie des plaques minces en considérant des conditions aux limites mécaniques et implémentation numérique en utilisant des éléments finis DKT et DKQ
 - Discrétisation de l'équation de Laplace en utilisant une approche éléments finis de type Kirchhoff

Merci de votre attention

References



Laëtitia Caillé, Franck Delvare, Liviu Marin, and Nathalie Michaux-Leblond.

Fading regularization mfs algorithm for the cauchy problem associated with the two-dimensional helmholtz equation.

[International Journal of Solids and Structures](#), 125 :122–133, 2017.



Alain Cimetiere, Franck Delvare, and Frédéric Pons.

Une méthode inverse à régularisation évanescence.

[Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics](#), 328(9) :639–644, 2000.



Azariel Paul Eyimi Minto Ebang.

Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques.

PhD thesis, Université de Poitiers, 2011.



Jacques Hadamard and Philip M. Morse.

Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.

[Physics Today](#), 6(8) :18–18, 1953.

_eprint : <https://doi.org/10.1063/1.3061337>.

Convergence de la formulation continue

Théorème

Si Φ_d est un quadruplet de données compatibles (i.e. un élément de $H(\Gamma_d)$), associé à la solution compatible $\mathbf{U}_e$ du problème de Cauchy (1), alors la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ définie par l'algorithme itératif (2) est telle que :

$$\mathbf{U}^k \rightarrow \Phi_d \quad \text{dans} \quad H(\Gamma_d) \quad \text{au sens fort} \quad (9)$$

$$\mathbf{U}^k \rightharpoonup \mathbf{U}_e \quad \text{dans} \quad H(\Gamma) \quad \text{au sens faible} \quad (10)$$

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

Convergence de la formulation continue

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

- Convergence au sens fort

- La série $\sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2$ est bornée,
- $\|\mathbf{U}^k - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2$ tend vers 0,
- $\mathbf{U}^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \Phi_d$ sur Γ_d .

Convergence de la formulation continue

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

● Convergence au sens faible

- Existence d'une sous-suite de $(\mathbf{U}^k)_k$ qui converge faiblement vers $\mathbf{U}_e$
 - $(\|\mathbf{U}^k - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2)_k$ est bornée, d'où $(\mathbf{U}^k)_k$ est une suite bornée de $H(\Gamma)$
 - il existe une sous-suite $(\mathbf{U}^{\mu})_{\mu}$ de $(\mathbf{U}^k)_k$ tel que :

$$\mathbf{U}^{\mu} \rightharpoonup \mathbf{U}_L \text{ dans } H(\Gamma)$$

- $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}^{\mu} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = 0$, d'où $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \mathbf{U}^{\mu} = \Phi_d$
- par unicité de la limite sur Γ_d : $\mathbf{U}_L|_{\Gamma_d} = \Phi_d$
- par unicité du prolongement harmonique (**Théorème de Holmgren**) :

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_e \text{ sur } \Gamma.$$

Convergence de la formulation continue

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

- Convergence au sens faible

- Existence d'une sous-suite de $(\mathbf{U}^k)_k$ qui converge faiblement vers $\mathbf{U}_e$
- Convergence faible de toute la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ vers $\mathbf{U}_e$ sur Γ

→ Démonstration par l'absurde

Convergence de la formulation continue

Lemme

Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :

$$\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

où $\mathbf{U}_e$ est la solution compatible du problème de Cauchy (1).

- Convergence au sens faible

- Existence d'une sous-suite de $(\mathbf{U}^k)_k$ qui converge faiblement vers $\mathbf{U}_e$
- Convergence faible de toute la suite $(\mathbf{U}^k)_k$ vers $\mathbf{U}_e$ sur Γ

→ Démonstration par l'absurde

Remarque

Pas d'équivalence du résultat du prolongement harmonique (théorème de Holmgren) en dimension finie.

Convergence en dimension finie ?

Théorème (Théorème de Holmgren – unicité du prolongement harmonique)

Soit $u \in H^2$ une solution du problème $P(u) = 0$ où les coefficients de P sont analytiques et $u = 0$ sur une courbe Γ non-caractéristique de classe C^1 . Alors u est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de Γ .

Remarque

Le théorème de Holmgren s'applique en particulier aux opérateurs elliptiques puisqu'ils n'admettent pas de courbes caractéristiques.

Formulation discrète

- $H_N(\Gamma)$: espace de caractérisation de $H(\Gamma)$ en dimension finie
- La méthode de régularisation évanescence discrète :

Soit $c > 0$ et $\mathbf{U}^0 \in H_N(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_N^{k+1} \in H_N(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\mathbf{U}_N^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\mathbf{V}_N), \quad \forall \mathbf{V}_N \in H_N(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\mathbf{V}_N) = \|\mathbf{V}_N|_{\Gamma_d} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{V}_N - \mathbf{U}_N^k\|_{\Gamma}^2 \text{ pour } \mathbf{V}_N \in H_N(\Gamma) \end{array} \right. \quad (9)$$

Φ_d : vecteur des données discrètes de dimension $4N_d$

- Les éléments de $H_N(\Gamma)$ qui s'accordent au mieux avec les N_d données
 - Si $N_d > N$: une solution au sens des moindres carrés.
 - Si $N_d \leq N$: une infinité de solutions, définies à un élément du noyau de "l'opérateur trace discret" sur Γ_d près :

$$Z_N(\Gamma) = \{\mathbf{U}_N \in H_N(\Gamma); \quad \mathbf{U}_N|_{\Gamma_d} = 0\}$$

$$Z_N^\perp(\Gamma) = \{\mathbf{U}_N \in H_N(\Gamma); \quad \langle \mathbf{U}_N, \mathbf{V}_N \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{V}_N \in Z_N(\Gamma)\}$$

Convergence de la formulation discrète

- Le problème de Cauchy discret peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_N^e \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \langle \mathbf{U}_N^e - \Phi_d, \mathbf{V}_N \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \mathbf{V}_N \in Z_N^\perp(\Gamma) \end{array} \right.$$

Théorème

Si $\mathbf{U}_N^0 = 0$ alors la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{U}_N^k \in Z_N^\perp(\Gamma), \quad \forall k \geq 0,$
- la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ converge vers la solution $\mathbf{U}_N^e$ du problème de Cauchy discret (4).

$$\langle \mathbf{U}_N^{k+1} - \Phi_d, \mathbf{V}_N \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{U}_N^{k+1} - \mathbf{U}_N^k, \mathbf{V}_N \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{V}_N \in H_N(\Gamma)$$

$$\mathbf{U}_N^k = \mathbf{z}_N^k + \mathbf{y}_N^k, \quad \forall \mathbf{z}_N^k \in Z_N(\Gamma), \quad \forall \mathbf{y}_N^k \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ et } \forall k \geq 0$$

$$\mathbf{V}_N = \mathbf{z}_N + \mathbf{y}_N, \quad \forall \mathbf{z}_N \in Z_N(\Gamma) \text{ et } \forall \mathbf{y}_N \in Z_N^\perp(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_N^{k+1} = \mathbf{z}_N^k, \quad \forall k \geq 0$$

$$\text{avec l'initialisation } \mathbf{U}_N^0 = 0, \text{ on obtient que } \mathbf{z}_N^k = \mathbf{z}_N^0 = 0, \quad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}_N^k \in Z_N^\perp(\Gamma), \quad \forall k \geq 0$$

Convergence de la formulation discrète

- Le problème de Cauchy discret peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_N^e \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \langle \mathbf{U}_N^e - \Phi_d, \mathbf{V}_N \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \mathbf{V}_N \in Z_N^\perp(\Gamma) \end{array} \right.$$

Théorème

Si $\mathbf{U}_N^0 = 0$ alors la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{U}_N^k \in Z_N^\perp(\Gamma), \quad \forall k \geq 0,$
- la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ converge vers la solution $\mathbf{U}_N^e$ du problème de Cauchy discret (4).

On a de même que dans le cas continu :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_N^{k+1} - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 = 0$$

Si la solution du problème de Cauchy discret vérifie l'hypothèse de compatibilité (i.e. $\mathbf{U}_N^e = \Phi_d$ sur Γ_d)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_N^{k+1} - \mathbf{U}_N^e\|_{\Gamma_d}^2 = 0$$

Par équivalence des normes en dimension finie, il existe $\alpha_N > 0$,

$$\|\mathbf{U}_N^{k+1} - \mathbf{U}_N^e\|_{\Gamma}^2 \leq \alpha_N \|\mathbf{U}_N^{k+1} - \mathbf{U}_N^e\|_{\Gamma_d}^2$$

Convergence de la formulation discrète

- Le problème de Cauchy discret peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_N^e \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \langle \mathbf{U}_N^e - \Phi_d, \mathbf{V}_N \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \mathbf{V}_N \in Z_N^\perp(\Gamma) \end{array} \right.$$

Théorème

Si $\mathbf{U}_N^0 = 0$ alors la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{U}_N^k \in Z_N^\perp(\Gamma), \quad \forall k \geq 0,$
- la suite $(\mathbf{U}_N^k)_k$ converge vers la solution $\mathbf{U}_N^e$ du problème de Cauchy discret (4).

On peut montrer aussi qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|\mathbf{U}_N^k - \mathbf{U}_N^e\|_\Gamma^2 \leq \left(\frac{c}{c + \alpha_N}\right)^k M, \quad \forall k \geq 0$$

→ Contractance de l'algorithme discret.