
Propagation d'ondes dans des milieux périodiques faiblement aléatoirement perturbés

Sonia Fliss, Laure Giovangigli

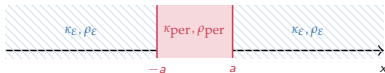
22 juin 2021



Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

- Milieu périodique aléatoirement perturbé :



P.s. pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$,

$$\kappa_{\varepsilon}(x, \omega) = \kappa_{\text{per}}(x) + \tilde{\kappa}_{\varepsilon}(x, \omega),$$

$$\rho_{\varepsilon}(x, \omega) = \rho_{\text{per}}(x) + \tilde{\rho}_{\varepsilon}(x, \omega).$$

- Equation de Helmholtz: p.s. $-\partial_x[\kappa_{\varepsilon}\partial_x u_{\varepsilon}] - \rho_{\varepsilon}k^2 u_{\varepsilon} = f$ in $\mathbb{R}$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $(-a, a)$

- Hypothèses :

- $\kappa_{\text{per}}, \rho_{\text{per}}$ L -périodiques
- Milieu absorbant $\mathcal{I}(k^2) > 0$
- p.p. p.s. $0 < \kappa_- \leq \kappa_{\varepsilon} \leq \kappa_+$, $0 < \rho_- \leq \rho_{\varepsilon} \leq \rho_+$.

- Objectif: Construire des conditions transparentes pour le milieu aléatoirement perturbé

- Afin de restreindre le domaine de calcul à $(-a, a)$, on étudie u_ε qui vérifie

$$\pm[\kappa_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}] + \lambda_\varepsilon^\pm u_\varepsilon = 0 \text{ on } \pm a, \quad \text{où } \lambda_\varepsilon^\pm := \mp[\kappa_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon^\pm}{\partial x}](\pm a) \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} -\partial_x[\kappa_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon^\pm] - \rho_\varepsilon k^2 u_\varepsilon^\pm = 0 \text{ in } (\pm a, \pm\infty), \\ u_\varepsilon^\pm = 1 \text{ at } \pm a. \end{cases}$$

- On dérive un développement asymptotique en loi par rapport à ε de $u_\varepsilon^\pm$ et du coefficient DtN $\lambda_\varepsilon^\pm$.

- Cas périodique : Fliss (09), Fliss, Joly & Li (06)

- Petites perturbations : V. I. Klyaskin (80), G. Papanicolaou & co (91)

- On considère deux types de perturbations : p.s. pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$,
- Régime d'homogénéisation stochastique

$$\kappa_\varepsilon(x, \omega) = \kappa_{\text{per}}(x) \left(1 + \nu_s^\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)^{-1}, \quad \rho_\varepsilon(x, \omega) = \rho_{\text{per}}(x) \left(1 + \nu_s^\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right),$$

avec ν_s^κ et ν_s^ρ processus stationnaires et fortement mélangeant.

Milieu homogène : Kozlov (79), Gloria & Otto (15), Armstrong, Kuusi & Mourrat (17), Bella, Fehrman, Fischer & Otto (17) 1D: Garnier (01), Bal (08)

- Cas des perturbations rares

$$\tilde{\kappa}_\varepsilon(x, \omega) = b_\varepsilon(x, \omega) \tilde{\kappa}_{\text{per}}(x), \quad \tilde{\rho}_\varepsilon(x, \omega) = b_\varepsilon(x, \omega) \tilde{\rho}_{\text{per}}(x),$$

avec $\tilde{\kappa}_{\text{per}}, \tilde{\rho}_{\text{per}}$ L -périodiques, $b_\varepsilon(x, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{I_j}(x) B_\varepsilon^j(\omega)$,

$I_j = [jL, (j+1)L]$ et $(B_\varepsilon^j)_{j \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre ε .

Régime d'homogénéisation périodique : A. Anantharaman & C. Le Bris (11, 12), J.-C. Mourrat (15)

Equation tronquée

- Pour tout Banach V , on munit $L^2(\Omega, V)$ de $\|u\|_{L^2(\Omega, V)} = \sqrt{\mathbb{E}(\|u\|_V^2)}$.
- u_ε^+ est l'unique solution dans $L^2(\Omega, H^1(\mathbb{R}_+^*))$ de l'équation

$$\begin{cases} -\partial_x[\kappa_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon^+] - \rho_\varepsilon k^2 u_\varepsilon^+ = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^*, \\ u_\varepsilon^+(0) = 1. \end{cases}$$

- u_ε^N est l'unique solution dans $L^2(\Omega, H^1((0, NL)))$ de l'équation

$$\begin{cases} -\partial_x[\kappa_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon^N] - \rho_\varepsilon k^2 u_\varepsilon^N = 0 \text{ in } (0, NL), \\ u_\varepsilon^N(0) = 1, \quad u_\varepsilon^N(NL) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Proposition

$$\forall \alpha < \Im(k^2)\rho_-, \quad \|u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^N\|_{L^2(\Omega, H^1((0, NL)))} = \mathcal{O}(e^{-\alpha NL}).$$

Déroulé de la présentation

1. Régime d'homogénéisation
2. Cas des perturbations rares

Présentation du modèle

$$\kappa_\varepsilon(x, \omega) = \kappa_{\text{per}}(x) \left(1 + \nu_s^\kappa \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)^{-1}, \quad \rho_\varepsilon(x, \omega) = \rho_{\text{per}}(x) \left(1 + \nu_s^\rho \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right).$$

· **Définition 1 :** Un processus $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dit **stationnaire** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et tout $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(f(x_1 + y) \in I_1, \dots, f(x_n + y) \in I_n) = \mathbb{P}(f(x_1) \in I_1, \dots, f(x_n) \in I_n).$$

· **Définition 2 :** $f := (f_1, \dots, f_p)$ est ρ -mélangeant s'il existe φ t.q.

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i, j \in [1, p], g_{A,i} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{A,i}, \mathbb{P}), g_{B,j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{B,j}, \mathbb{P}),$$

$$|Corr(g_{A,i}, g_{B,j})| := \left| \frac{\mathbb{E}[(g_{A,i} - \mathbb{E}[g_{A,i}])(g_{B,j} - \mathbb{E}[g_{B,j}])]}{\sqrt{\mathbb{E}[g_{A,i}^2] \mathbb{E}[g_{B,j}^2]}} \right| \leq \varphi(d(A, B)),$$

où $\mathcal{F}_{A,i}$ (resp. $\mathcal{F}_{B,j}$) est la sous-tribu générée par $f_i(x, \cdot)$ pour $x \in A$ (resp. $f_j(x, \cdot)$ pour $x \in B$).

Hypothèses : $(\nu_s^\kappa, \nu_s^\rho)$ est stationnaire, ρ -mélangeant avec $\varphi^{1/2}$ dans $L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et de moyenne nulle.

Exemples de milieux et solutions

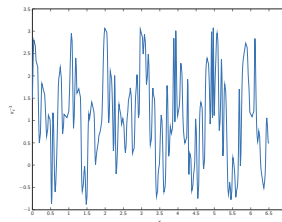
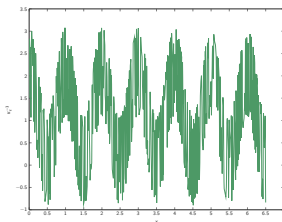


Figure: ρ_ε pour $\varepsilon = 0.01$ et $\varepsilon = 0.2$.

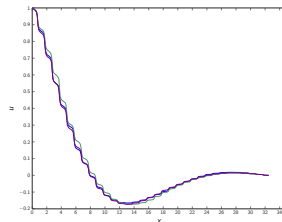
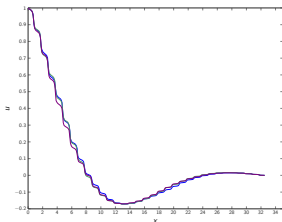


Figure: u_ε^N pour $\varepsilon = 0.05$ et $\varepsilon = 0.2$.

Expressions de u_ε^N et v_ε^N

- Soit G la fonction de Green associée au problème périodique non perturbé. Pour tout $y \in (0, NL)$, $G(\cdot, y)$ est l'unique solution dans $H^1((0, NL))$ de

$$\begin{cases} -\partial_x [\kappa_{\text{per}} \partial_x G(\cdot, y)] - k^2 \rho_{\text{per}} G(\cdot, y) = \delta(\cdot - y) & \text{in } (0, NL), \\ G(0, y) = 0, \quad G(NL, y) = 0. \end{cases}$$

- On définit pour tout $f \in L^2((0, NL))$

$$\mathcal{G}f(\cdot) = \int_0^{NL} G(x, \cdot) f(x) dx \text{ and } \mathcal{G}_1 f(\cdot) = \int_0^{NL} \partial_x G(x, \cdot) f(x) dx.$$

- Soit $v_\varepsilon^N := \kappa_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon^N$. u_ε^N s'écrit alors

$$u_\varepsilon^N = \mathcal{G}_1 \left[\nu_s^\kappa \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon^N \right] + k^2 \mathcal{G} \left[\rho_{\text{per}} \nu_s^\rho \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon^N \right] + u_{\text{per}}^N.$$

- Soit $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{G}_1^*$ les opérateurs correspondant à la fonction de Green G^* du problème périodique vérifié par le flux. v_ε^N s'écrit

$$v_\varepsilon^N = -k^2 \mathcal{G}_1^* \left[\nu_s^\rho \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon^N \right] + k^2 \mathcal{G}^* \left[\frac{1}{\kappa_{\text{per}}} \nu_s^\kappa \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon^N \right] + v_{\text{per}}^N.$$

Convergence de u_ε^N et v_ε^N

Théorème

Il existe une constante C t.q.

$$\|u_\varepsilon^N - u_{\text{per}}^N\|_{L^2(\Omega, L^2((0, NL)))} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad \|v_\varepsilon^N - v_{\text{per}}^N\|_{L^2(\Omega, L^2((0, NL)))} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Éléments de preuve : · $G, G^*, \partial_x G, \partial_x G^*, u_\varepsilon^N$ et v_ε^N unif. bornées sur $(0, NL)$

· Pour tout H et $f \in L^\infty((0, NL))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \mathcal{H} \left[v^s \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) f \right] \right\|_{L^2}^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{NL} \left| \int_0^{NL} H(x, y) v^s \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) f(y) dy \right|^2 dx \right], \\ &\leq C \|f\|_\infty^2 \int_0^{NL} \int_0^{NL} \int_0^{NL} |\mathbb{E} [v^s \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) v^s \left(\frac{t'}{\varepsilon} \right)]| dt dt' dx, \\ &\leq C \|f\|_\infty^2 \int_0^{NL} \int_0^{NL} \int_0^{NL} \varphi \left(\frac{|t - t'|}{\varepsilon} \right) dt dt' dx \leq C\varepsilon \|f\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Correcteur d'ordre 1

- Soit $u_{1,\varepsilon} := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{G}_1 [\nu_s^\kappa \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nu_{per}^N] + k^2 \mathcal{G} [\rho_{per} \nu_s^\rho \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) u_{per}^N])$.

Théorème

Il existe C t.q.

$$\left\| u_\varepsilon^N - u_{per}^N - \sqrt{\varepsilon} u_{1,\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega, L^2((0, NL)))} \leq C \varepsilon,$$

$$\text{et} \quad u_{1,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\mathcal{L}} \int_0^{NL} \sigma_u(x, t) dW_t,$$

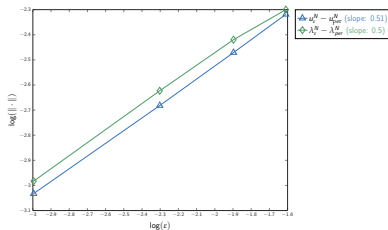
où $\sigma_u^2(x, t) = 2 \int_0^\infty \mathbb{E}(F_\ell(x, t, 0) F_\ell(x, t, z)) dz,$

et $F_u(x, t, z) = k^2 \nu_s^\rho(z) G(x, t) \rho_{per} u_{per}^N(x) + \nu_s^\kappa(z) \partial_x G(x, t) \nu_{per}^N(x).$

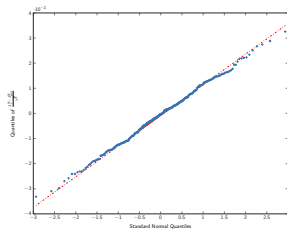
- On peut prouver un résultat similaire pour v_ε avec

$$v_{1,\varepsilon} := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (-k^2 \mathcal{G}_1^* [\nu_s^\rho \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) u_{per}^N] + k^2 \mathcal{G}^* [\frac{1}{\kappa_{per}} \nu_s^\kappa \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nu_{per}^N]).$$

Simulations numériques - Validation



(a)



(b)

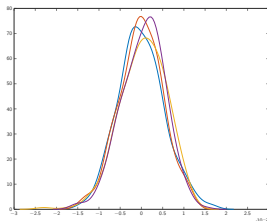
Figure: (a) Convergence de u_ϵ^N dans $L^2(\Omega, L^2((0, NL)))$ (resp. λ_ϵ^N dans $L^2(\Omega)$), (b) Normal quantile-quantile plot de $\frac{\lambda_\epsilon^N - \lambda_{\text{per}}^N}{\sqrt{\epsilon}}$ pour $\epsilon = 0.05$.

Simulations numériques - Conditions transparentes

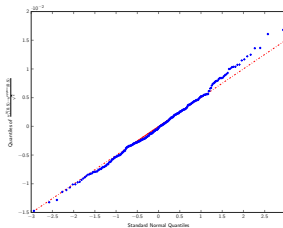
On considère un milieu homogène sur $[-1, 0]$ et on résout

$$\begin{cases} -\partial_x[\kappa_{hom}\partial_x u] - \rho_{hom}k^2 u = 0 & \text{in } (-1, 0), \\ u(-1) = 1, \quad \partial_x u(0) = \lambda u(0) \end{cases}$$

Pour $\lambda = \lambda_\varepsilon^N(\omega)$, on obtient $u_\varepsilon^N(\omega, \cdot)$ et pour $\lambda = \lambda_{per}^N$, on obtient u_{per}^N .



(a)



(b)

Figure: (a) Densité de probabilité de $\frac{u_\varepsilon^N(-0.5) - u_{per}^N(-0.5)}{\sqrt{\varepsilon}}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,
(b) Normal quantile-quantile plot pour $\varepsilon = 0.05$.

Déroulé de la présentation

1. Régime d'homogénéisation
2. Cas des perturbations rares

Présentation du modèle

- Soit $(B_\varepsilon^j)_{j \in \mathbb{N}}$ des v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre ε .
- P.p. et p.s. les paramètres du milieu sont donnés par

$$\begin{aligned}\kappa_\varepsilon(x, \omega) &= \kappa_{\text{per}}(x) + b_\varepsilon(x, \omega) \tilde{\kappa}_{\text{per}}(x), \\ \rho_\varepsilon(x, \omega) &= \rho_{\text{per}}(x) + b_\varepsilon(x, \omega) \tilde{\rho}_{\text{per}}(x),\end{aligned}$$

où $\kappa_{\text{per}}, \tilde{\kappa}_{\text{per}}, \rho_{\text{per}}, \tilde{\rho}_{\text{per}}$ sont L -périodiques et

$$b_\varepsilon(x, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{I_j}(x) B_\varepsilon^j(\omega), \quad I_j = [jL, (j+1)L].$$

Exemples de milieux

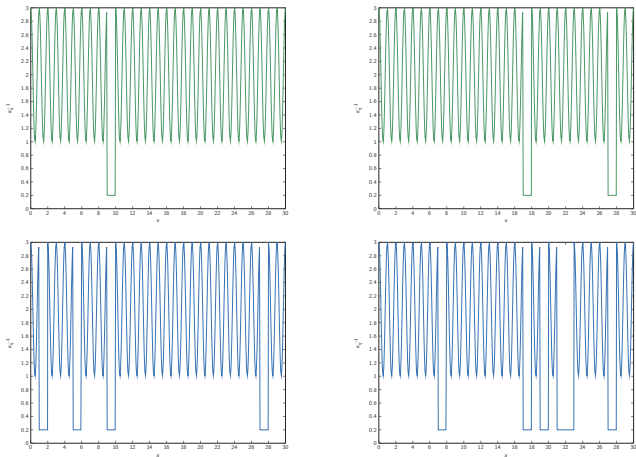


Figure: κ_ε^{-1} pour $\varepsilon = 0.05$ (haut) et $\varepsilon = 0.2$ (bas).

Exemples de solutions

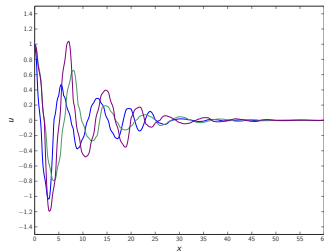
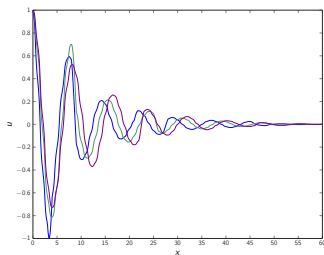


Figure: u_{ε}^N pour $\varepsilon = 0.05$ (gauche) et $\varepsilon = 0.2$ (droite).

Convergence de u_ε^N

Théorème

Il existe C t.q.

$$\|u_\varepsilon^N - u_{\text{per}}^N\|_{L^2(\Omega, H^1((0, NL)))} \leq C\sqrt{\varepsilon} \|u_{\text{per}}^N\|_{H^1((0, NL))},$$

Preuve : Soit $r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon^N - u_{\text{per}}^N$ unique solution de $L^2(\Omega, H^1((0, NL)))$ de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \kappa_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} r_\varepsilon^0 - k^2 \rho_\varepsilon r_\varepsilon^0 = \frac{\partial}{\partial x} b_\varepsilon \tilde{\kappa}_{\text{per}} \frac{\partial}{\partial x} u_{\text{per}}^N + b_\varepsilon \tilde{\rho}_{\text{per}} k^2 u_{\text{per}}^N, & \text{in } (0, NL), \\ r_\varepsilon^0(0) = 0, & r_\varepsilon^0(NL) = 0. \end{cases}$$

Par un calcul direct on a

$$\begin{aligned} \|b_\varepsilon u_{\text{per}}\|_{L^2(\Omega, L^2((0, NL)))}^2 &= \mathbb{E} \int_0^{NL} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{1}_{I_j} B_\varepsilon^j \right)^2 |u_{\text{per}}^N|^2 \\ &= \mathbb{E} \int_0^{NL} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{1}_{I_j} (B_\varepsilon^j)^2 |u_{\text{per}}^N|^2 = \varepsilon \|u_{\text{per}}^N\|_{L^2((0, NL))}^2 \end{aligned}$$

Expression de u_ε^N

- Soit $u_{j_1, \dots, j_p}^N$ la solution de $H^1((0, NL))$ dans le milieu où seules les périodes $l_{j_1}, \dots, l_{j_p}$ sont perturbées pour $0 \leq j_1 < \dots < j_p \leq N-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{\text{per}} + \sum_{m=1}^p \mathbb{1}_{l_{j_m}} \tilde{\kappa}_{\text{per}} \right) \frac{\partial}{\partial x} u_{j_1, \dots, j_p}^N - k^2 \left(\rho_{\text{per}} + \sum_{m=1}^p \mathbb{1}_{l_{j_m}} \tilde{\rho}_{\text{per}} \right) u_{j_1, \dots, j_p}^N = 0 \\ \text{in } (0, NL), \\ u_{j_1, \dots, j_p}^N(0) = 1, \quad u_{j_1, \dots, j_p}^N(NL) = 0. \end{array} \right.$$

- On définit pour $\omega \in \Omega$, $\mathcal{P}_\omega := \{j \in [0, N-1] \mid B_\varepsilon^j(\omega) = 1\}$.
- u_ε^N s'écrit alors pour tout $x \in (0, NL)$, $\omega \in \Omega$

$$u_\varepsilon^N(x, \omega) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}_\omega = \emptyset}(\omega) u_{\text{per}}^N(x) + \sum_{p=1}^N \sum_{j_1 < \dots < j_p} \mathbb{1}_{\mathcal{P}_\omega = \{j_1, \dots, j_p\}}(\omega) u_{j_1, \dots, j_p}^N(x).$$

Développement asymptotique dans $L^2(\Omega, H^1((0, NL)))$

- L'espérance de u_ε^N peut alors s'exprimer

$$\mathbb{E}(u_\varepsilon^N) = (1 - \varepsilon)^N u_{\text{per}}^N + \varepsilon^p (1 - \varepsilon)^{N-p} \sum_{p=1}^N \sum_{j_1 < \dots < j_p} u_{j_1, \dots, j_p}^N,$$

- On a alors un développement à tout ordre de $\mathbb{E}(u_\varepsilon^N)$ dans $H^1((0, NL))$.

Proposition

Soit $v_j := u_j^N - u_{\text{per}}^N$ pour $j \in [0, N-1]$. Il existe C t.q.

$$\|\mathbb{E}(u_\varepsilon^N) - u_{\text{per}}^N - \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} v_j^N\|_{H^1((0, NL))} \leq C\varepsilon^2,$$

$$\|u_\varepsilon^N - u_{\text{per}}^N - \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} v_j^N\|_{L^2(\Omega, H^1((0, NL)))} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Développement asymptotique en loi

Théorème

Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty((0, NL))$, il existe C t.q.

$$\|\mathbb{E}(\varphi(u_\varepsilon^N)) - \varphi(u_{\text{per}}^N) - \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(u_j^N) - \varphi(u_{\text{per}}^N)\|_{H^1((0, NL))} \leq C\varepsilon^2.$$

- On peut ainsi dériver des développements à tout ordre.
- Soit $P_{u_\varepsilon^N}$ la loi de u_ε^N . Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité à support compact sur $\mathbb{R}$. Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ faiblement-*

$$P_{u_\varepsilon^N} = \delta_{u_{\text{per}}^N} + \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{u_j^N} - \delta_{u_{\text{per}}^N} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

- Ce résultat se généralise à toutes les $(B_\varepsilon^j)_j$ i.i.d. de $L^2(\Omega)$ t.q.

$$P_{B_\varepsilon} = \delta_0 + \varepsilon P^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \text{ faiblement-}^* \text{ in } \mathcal{P}((-M, M)) \text{ et } \mathbb{E}((B_\varepsilon)^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Simulations numériques - Validation

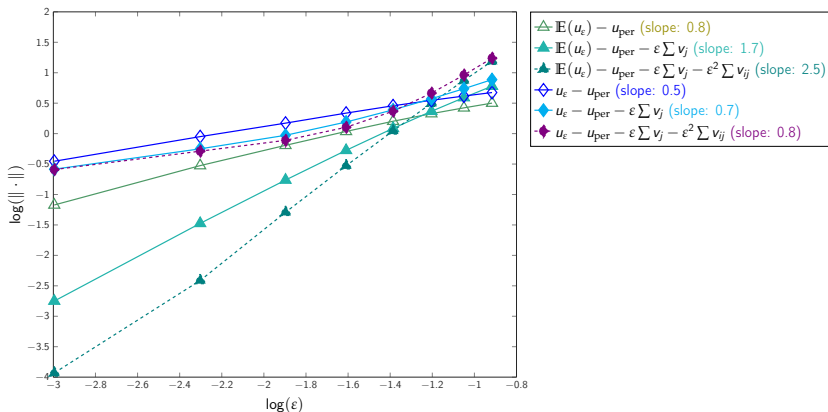
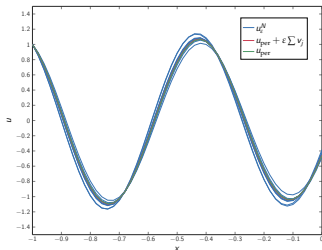


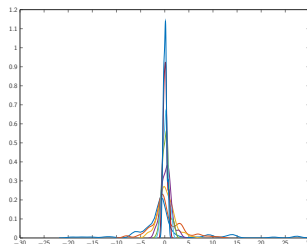
Figure: Convergence of $\mathbb{E}(u_\epsilon^N)$ et u_ϵ^N et leurs développements asymptotiques.

Simulations numériques - Conditions transparentes

Pour $\lambda = \lambda_\varepsilon^N(\omega)$ (resp. λ_{per}^N et $\lambda_{per}^N + \varepsilon \sum_{j=1}^N (\lambda_j^N - \lambda_{per}^N)$), on obtient $u_\varepsilon^N(\omega, \cdot)$ (resp. u_{per}^N et u_ε^{approx}).



(a)



(b)

Figure: (a) Solution u dans $[-1, 0]$ avec des conditions DtN exacte et approchées pour $\varepsilon = 0.05$, (b) Densité de probabilité de $\frac{u_\varepsilon - u_\varepsilon^{approx}}{\varepsilon^2}(-0.5)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Conclusion et perspectives

- Approximation en loi de la solution dans un milieu périodique unidimensionnel absorbant pour deux types de perturbations
- Perspectives :
 - Extension aux milieux non absorbants quand la fréquence est dans les trous spectraux de l'opérateur périodique considéré
 - Extension aux dimensions supérieures : en cours pour le régime d'homogénéisation

Merci pour votre attention!

S. Fliss and L. Giovangigli. Time harmonic wave propagation in one dimensional weakly randomly perturbed periodic media, *SN Partial Differential Equations and Applications*, **38** (2020).