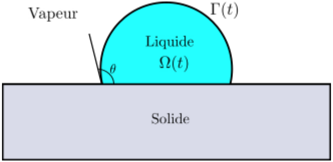
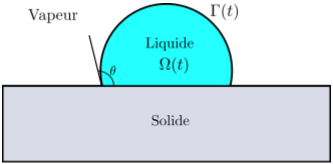
Méthodes de champ de phase pour le mouvement par diffusion de surface avec application au mouillage.

Arnaud Sengers

Collaboration : Elie Bretin, Simon Masnou, Roland Denis et Garry Terii

Congès SMAI
24 Juin 2021

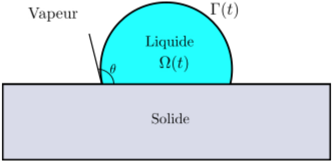

Vapeur
$\Gamma(t)$
Liquide
$\Omega(t)$
θ
Solide



Loi de Young

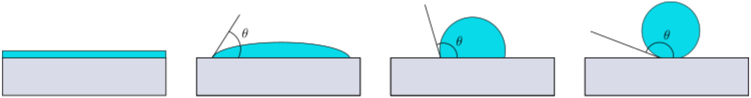
$$\cos(\theta) = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{LS}}{\sigma_{VL}}$$

Problème de mouillage



Loi de Young

$$\cos(\theta) = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{LS}}{\sigma_{VL}}$$



$\theta \rightarrow 0°$	$0 < \theta < 90°$	$90 < \theta < 150°$	$\theta > 150°$
Mouillage parfait	Matériau hydrophile	Matériau hydrophobe	Matériau superhydrophobe

Loi d'évolution. Formulation biphasique

Énergie de périmètre

$$E(t) = \begin{cases} \mathrm{Per}(\Omega(t)) \text{ en dimension 2} \\ \mathrm{Aire}(\Omega(t)) \text{ en dimension 3} \end{cases}$$

Loi d'évolution. Formulation biphasique

Énergie de périmètre

$$E(t) = \begin{cases} \mathrm{Per}(\Omega(t)) \text{ en dimension 2} \\ \mathrm{Aire}(\Omega(t)) \text{ en dimension 3} \end{cases}$$

Diffusion de surface

$$V(t) = \Delta_{\Gamma(t)} H(t)$$

- Minimisation du périmètre/aire
- Flot de gradient H^{-1} de E
- Conservation locale de la matière

Loi d'évolution. Formulation biphasique

Énergie de périmètre

$$E(t) = \begin{cases} \text{Per}(\Omega(t)) \text{ en dimension 2} \\ \text{Aire}(\Omega(t)) \text{ en dimension 3} \end{cases}$$

Diffusion de surface

$$V(t) = \Delta_{\Gamma(t)} H(t)$$

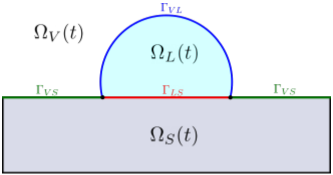
- Minimisation du périmètre/aire
- Flot de gradient H^{-1} de E
- Conservation locale de la matière

Difficulté

- Gestion explicite de θ avec des conditions de bords sur Γ_{LS}
- Difficile à gérer si le support solide est irrégulier.

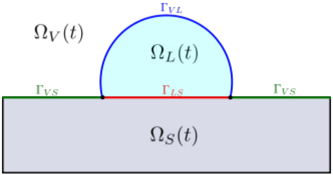
$$E = \sigma_{SV}\text{Aire}(\Gamma_{SV}) + \sigma_{LS}\text{Aire}(\Gamma_{LS}) + \sigma_{VL}\text{Aire}(\Gamma_{VL})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{L} \sigma_{ij}\text{Aire}(\Gamma_{ij}) \qquad \text{Cas général à } L \text{ phases}$$



Loi d'évolution. Formulation multiphase

$$E = \sigma_{SV}\text{Aire}(\Gamma_{SV}) + \sigma_{LS}\text{Aire}(\Gamma_{LS}) + \sigma_{VL}\text{Aire}(\Gamma_{VL})$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{L} \sigma_{ij}\text{Aire}(\Gamma_{ij}) \qquad \text{Cas général à } L \text{ phases}$$



Diffusion de surface. Version multiphase

$$\frac{1}{\nu_{ij}} V_{ij}(t) = \sigma_{ij}\Delta_{\Gamma_{ij}(t)} H_{ij}(t)$$

Principe

- Gestion naturelle de θ
- Le support solide fixé par les mobilités $\nu_{LS} = \nu_{VS} = 0$
- Pas de complexité supplémentaire liée à la régularité du support solide

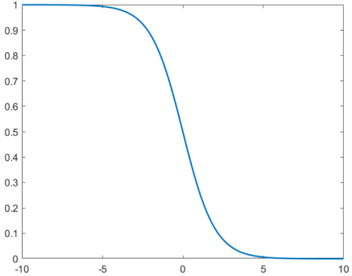
Idée : régularisation

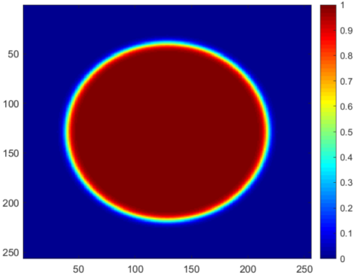
- Approximer la fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Omega$ par une fonction u_ε régulière. Pour $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{2}$,

$$u_\varepsilon = q\left(d(x,\Omega)\right) := \frac{1 - \tanh\left(\frac{d(x,\Omega)}{2}\right)}{2}$$

- Approcher l'énergie de périmètre $E(\mathbb{1}_\Omega)$ par

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u_\varepsilon)dx$$





Equation de Cahn-Hilliard

$$
\begin{tikzcd}
E_\varepsilon \arrow[r, "\text{[Modica-Mortola77]}", "\varepsilon \to 0"'] \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"'] & E \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"] \\
\partial_t u = -\nabla_{H^{-1}} E_\varepsilon(u) \arrow[r, dashed, "?", "\varepsilon \to 0"'] & V(t) = -\Delta_{\Gamma(t)} H(t)
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
E_\varepsilon \arrow[rr, "\text{[Modica-Mortola77]}", "\varepsilon \to 0"'] \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"'] & & E \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"] \\
\partial_t u = -\nabla_{H^{-1}} E_\varepsilon(u) \arrow[rr, dashed, "?", "\varepsilon \to 0"'] & & V(t) = -\Delta_{\Gamma(t)} H(t)
\end{tikzcd}$$

Système de Cahn-Hilliard Classique

$$(\textbf{C-CH}) : \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \Delta \mu \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u \end{cases} \qquad \text{(Flot de gradient } H^{-1} \text{ de } E_\varepsilon\text{)}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
E_\varepsilon \arrow[r, "\text{[Modica-Mortola77]}", "\varepsilon \to 0"'] \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"'] & E \arrow[d, "\text{Flot } H^{-1}"] \\
\partial_t u = -\nabla_{H^{-1}} E_\varepsilon(u) \arrow[r, dashed, "?", "\varepsilon \to 0"'] & V(t) = -\Delta_{\Gamma(t)} H(t)
\end{tikzcd}$$

Système de Cahn-Hilliard Classique

$$(\mathbf{C\text{-}CH}) : \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \Delta\mu \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u \end{cases} \qquad (\text{Flot de gradient } H^{-1} \text{ de } E_\varepsilon)$$

Problème [Pego 89], [Alikakos 94]

Lorsque $\varepsilon \to 0$, (**C-CH**) ne converge pas vers la diffusion de surface mais vers

$$\text{Mullins-Sekerka} : \begin{cases} \Delta\mu = 0 \text{ sur } \Omega/\Gamma, \mu = H \\ V_n = [\nabla_n \mu]_\pm \end{cases}$$

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M \nabla f \cdot \nabla g dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M.

Équation de Cahn-Hilliard avec mobilité dégénérée

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M \nabla f \cdot \nabla g dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M.

Système de Cahn-Hilliard avec mobilité

$$(\textbf{M-CH}) : \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \operatorname{div} \left(M(u) \nabla \mu \right) \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u \end{cases} \qquad \text{(Flot de gradient } H^{-1} \text{ de } E_\varepsilon\text{)}$$

Équation de Cahn-Hilliard avec mobilité dégénérée

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M \nabla f \cdot \nabla g dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M.

Système de Cahn-Hilliard avec mobilité

$$\textbf{(M-CH)} : \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \operatorname{div}\left(M(u) \nabla \mu \right) \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u \end{cases} \qquad \text{(Flot de gradient } H^{-1} \text{ de } E_\varepsilon)$$

Propriétés du modèle

- Modèle variationnel : $\frac{d}{dt} E_\varepsilon(u) dx = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int M(u) |\nabla \mu|^2 \leq 0$
- Conservation de la masse : $\frac{d}{dt} \int u \; dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int \operatorname{div}\left(M(u) \nabla \mu \right) = 0$

Question

Quel choix faire pour la mobilité M ?

Exemples de mobilité : $M(s) = s(1-s)$, $M(s) = [s(1-s)]_+$, $M(s) = s^2(1-s)^2$.

Question

Quel choix faire pour la mobilité M ?

Exemples de mobilité : $M(s) = s(1-s)$, $M(s) = [s(1-s)]_+$, $M(s) = s^2(1-s)^2$.

Choix de la mobilité M

- Pour avoir la bonne vitesse, il faut que M soit doublement dégénérée :

$$M(0) = M(1) = M'(0) = M'(1) = 0$$

- Plus l'ordre de mobilité est élevé, plus la vitesse de l'interface est faible.
- $M(s) = s^2(1-s)^2$ est le choix optimal.

Équation de Cahn-Hilliard avec mobilité dégénérée

Question

Quel choix faire pour la mobilité M ?

Exemples de mobilité : $M(s) = s(1-s)$, $M(s) = [s(1-s)]_+$, $M(s) = s^2(1-s)^2$.

Choix de la mobilité M

- Pour avoir la bonne vitesse, il faut que M soit doublement dégénérée :

$$M(0) = M(1) = M'(0) = M'(1) = 0$$

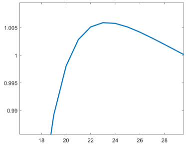
- Plus l'ordre de mobilité est élevé, plus la vitesse de l'interface est faible.
- $M(s) = s^2(1-s)^2$ est le choix optimal.

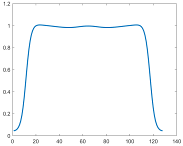
Dans ce cas, le modèle (**M-CH**) vérifie:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = q\left(\dfrac{d(x,\Omega(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ V_\varepsilon = \Delta_{\Gamma(t)} H(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ Vol(\Omega(t)) = Vol(\Omega(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

Problème 1

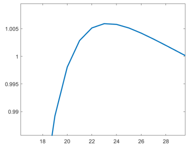
Profil et propriété de positivité.

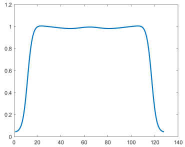




Problème 1

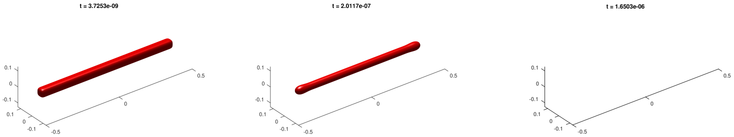
Profil et propriété de positivité.





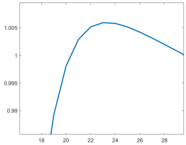
Problème 2

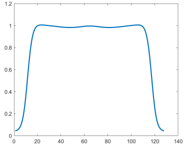
Conservation du volume et structures fines.



Problème 1

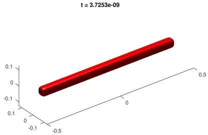
Profil et propriété de positivité.

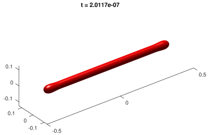


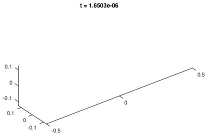


Problème 2

Conservation du volume et structures fines.







Question

Que faire pour améliorer la précision du modèle ?

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M \nabla (N f) \cdot \nabla (N g) \, dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M et N.

Nouveau modèle de Cahn-Hilliard d'ordre 2

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M \nabla (N f) \cdot \nabla (N g) \, dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M et N.

Système de Cahn-Hilliard avec deux mobilités

$$(\textbf{NMN-CH}) : \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = N(u) \operatorname{div} \left(M(u) \nabla \left(N(u) \mu \right) \right) \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u \end{cases}$$

avec $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{2}$, $M(s) = s^2(1-s)^2$.

Nouveau modèle de Cahn-Hilliard d'ordre 2

Dérivation du flot de gradient H^{-1} selon la structure induite par

$$< f, g >_{H_0^1} = \int M\nabla\left(Nf\right)\cdot\nabla\left(Ng\right)dx$$

où l'on introduit une dépendance en u dans M et N.

Système de Cahn-Hilliard avec deux mobilités

$$(\textbf{NMN-CH}) : \begin{cases} \varepsilon^2\partial_t u = N(u)\,\mathrm{div}\left(M(u)\nabla\left(N(u)\mu\right)\right) \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2\Delta u \end{cases}$$

avec $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{2}$, $M(s) = s^2(1-s)^2$.

Propriétés du modèle

- Modèle variationnel : $\frac{d}{dt}P_\varepsilon(u)dx = -\frac{1}{\varepsilon^3}\int M(u)|\nabla(N(u)\mu)|^2 \leq 0$
- Conservation de la masse : Pour $G(s) = \int_0^s \sqrt{2W(t)}dt$,

$$\frac{d}{dt}\int G(u)dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\int \mathrm{div}\left(M(u)\nabla(N(u)\mu)\right) = 0$$

Question

Quel choix pour N ?

Question

Quel choix pour N ?

Motivation

- Dans les développements asymptotiques pour le modèle (**M-CH**), le terme d'erreur d'ordre 1 U_1 satisfait l'équation

$$\partial_{zz} U_1 - W''(q(z))U_1 = (-c_W - q'(z))H$$

Comme le membre de droite est non nul, $U_1 \neq 0$.

- Pour le modèle (**NMN-CH**), U_1 satisfait

$$\partial_{zz} U_1 - W''(q(z))U_1 = \underbrace{[-\frac{1}{N(q(z))} - q'(z)]}_{=0\ ?}H$$

Nouveau modèle de Cahn-Hilliard d'ordre 2

Question

Quel choix pour N ?

Motivation

- Dans les développements asymptotiques pour le modèle (**M-CH**), le terme d'erreur d'ordre 1 U_1 satisfait l'équation

$$\partial_{zz} U_1 - W''(q(z))U_1 = (-c_W - q'(z))H$$

Comme le membre de droite est non nul, $U_1 \neq 0$.

- Pour le modèle (**NMN-CH**), U_1 satisfait

$$\partial_{zz} U_1 - W''(q(z))U_1 = 0$$

Choix de N

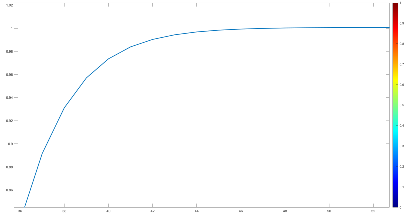
$$N(s) = \frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{\sqrt{M(s)}}$$

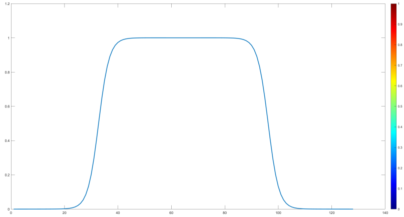
Propriétés modèle (NMN-CH)

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = q\left(\dfrac{d(x,\Omega(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ V_\varepsilon = \Delta_{\Gamma(t)} H(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ Vol(\Omega(t)) = Vol(\Omega(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Propriétés modèle (**NMN-CH**)

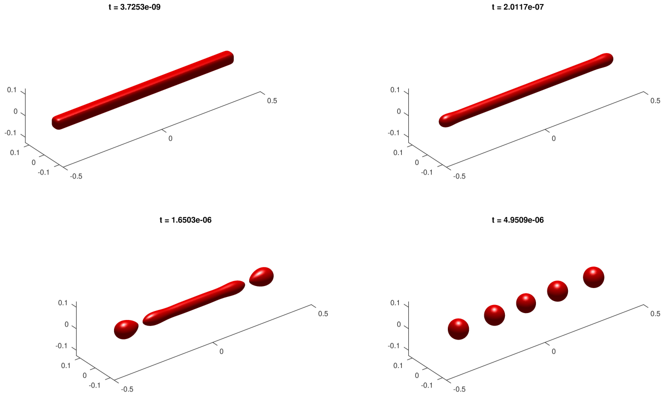
$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = q\left(\dfrac{d(x,\Omega(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ V_\varepsilon = \Delta_{\Gamma(t)} H(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ Vol(\Omega(t)) = Vol(\Omega(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$





Propriétés modèle (**NMN-CH**)

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = q\left(\dfrac{d(x,\Omega(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ V_\varepsilon = \Delta_{\Gamma(t)} H(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ Vol(\Omega(t)) = Vol(\Omega(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$



En posant $B(u) = -\frac{1}{2}\nabla(\log(M(u))$, on définit

$$\begin{cases} J_c(\mu) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int m|\nabla\mu|^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \beta\mu^2 \\ J_e(\mu) = \displaystyle\int \mu B(u)\cdot\nabla\mu + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \left(|B(u)|^2 - \beta\right)\mu^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1-m)|\nabla\mu|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_c(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \varepsilon|\nabla u|^2 + \dfrac{\alpha}{\varepsilon}u^2 \\ E_e(u) = \displaystyle\int \dfrac{1}{\varepsilon}\left(W(u) - \alpha\dfrac{u^2}{2}\right) \end{cases}$$

Reformulation convexe-concave

On peut reformuler le modèle (**NMN-CH**) sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nabla_\mu J_c(\mu) - \nabla_\mu J_e(\mu) \\ \mu = \nabla_u E_c(u) + \nabla_u E_e(u) \end{cases}$$

Pour $\alpha \geq \max_s W''(s)\ m, \beta$ suffisamment grands, (J_c, J_e) et (E_c, E_e) forment des couples de fonctionnelles convexes et concaves.

Propriété : Méthode de *Splitting*

Basé sur le principe

- Convexe $\rightarrow$ Implicite
- Concave $\rightarrow$ Explicite

Le schéma de discrétisation obtenu

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} = m\Delta\mu^{n+1} - \beta\mu^{n+1} + \left[N(u^n)\,\mathrm{div}\left(M(u^n)\nabla(N(u^n)\mu^n)\right) - m\Delta\mu^n + \beta\mu^n\right] \\ \mu^{n+1} = \left(-\Delta u^{n+1} + \dfrac{\alpha}{\varepsilon^2}u^{n+1}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(W'(u^n) - \alpha u^n\right) \end{cases}$$

est inconditionnellement stable en pratique.

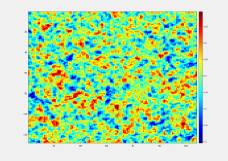
Méthode numérique

Les termes en (u^{n+1}, μ^{n+1}) sont associés avec des opérateurs linéaires. On peut donc résoudre le système efficacement dans l'espace de Fourier.

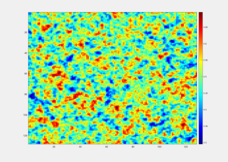
Exemple de code

```
clear all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%% Numerical parameters %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
N = 2^9; epsilon =1/N; dt =epsilon^4; T =1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%% Double well potential, mobilities %%%%%%%%%%%
W = @(U) 1/2*(U.*(U-1)).^2;
W_prim = @(U) (U.*(U-1).*(2*U-1));
MobM = @(U) ((((U).*(1-U)).^2+epsilon^2) );
MobN = @(U) 1./sqrt(MobM(U) );

%%%%%%%%%%%%%%%%% Fourier operators %%%%%%%%%
k = [0:N/2,-N/2+1:-1]; [K1,K2] = meshgrid(k,k);
Delta = -4*pi^2*((K1.^2 + (K2).^2));
alpha = 2; beta = 1/epsilon^2; m = 1;
M_LNMN = 1./(1 + dt*(m*Delta - beta) .*(Delta - alpha/epsilon^2));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Initial condition %%%%%%%%%%%%
U = rand(N,N); U_fourier = fft2(U);
Mu = zeros(N,N); Mu_fourier = zeros(N,N);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Scheme loop %%%%%%%%%%%%
for i=1:T/dt,
mobMU = MobM(U); mobNU = MobN(U);
sqrtM = sqrt(mobMU); sqrtM_fourier = fft2(sqrtM);
nabla1_sqrtM= real(ifft2(2*pi*1i*K1.*sqrtM_fourier )); nabla2_sqrtM= real(ifft2(2*pi*1i*K2.*sqrtM_fourier ));

muN_fourier = fft2(Mu.*mobNU); muN = real(ifft2(muN_fourier));
nabla1_muN = real(ifft2(2*pi*1i*K1.*muN_fourier )); nabla2_muN = real(ifft2(2*pi*1i*K2.*muN_fourier ));
laplacien_muN = real(ifft2(Delta.*muN_fourier ));
NdivMgradNMu = sqrtM.*laplacien_muN + 2*(nabla1_sqrtM.*nabla1_muN +nabla2_sqrtM.*nabla2_muN);

B1 = U_fourier + dt*(fft2(NdivMgradNMu) - (m*Delta-beta).*Mu_fourier);
B2 = fft2(W_prim(U)/epsilon^2 - alpha/epsilon^2*U);

U_fourier = M_LNMN.*(B1 + dt*(m*Delta-beta).*B2);
U = real(ifft2(U_fourier));
Mu_fourier = M_LNMN.*((alpha/epsilon^2 - Delta).*B1 + B2);
Mu = real(ifft2(Mu_fourier));

end
```

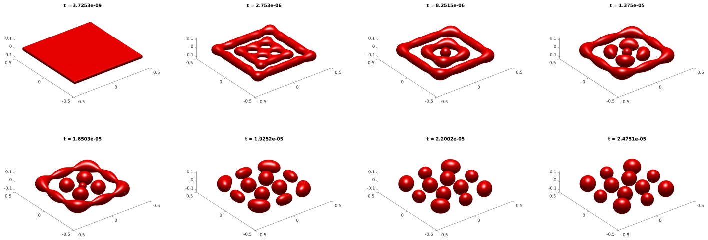
Simulation du code précédent.



Simulation du code précédent.



Exemple de démouillage en 3D.



On suppose :

- Les tensions de surfaces additives

$$\sigma_{ij} = \sigma_i + \sigma_j$$

- Les coefficients de mobilité harmoniquement additifs

$$\frac{1}{\nu_{ij}} = \frac{1}{\nu_i} + \frac{1}{\nu_j}$$

On suppose :

- Les tensions de surfaces additives

$$\sigma_{ij} = \sigma_i + \sigma_j$$

- Les coefficients de mobilité harmoniquement additifs

$$\frac{1}{\nu_{ij}} = \frac{1}{\nu_i} + \frac{1}{\nu_j}$$

Cas du mouillage

- En dimension 3, sous réserve que l'inégalité triangulaire soit vérifiée, on a

$$\begin{cases} \sigma_L = \dfrac{\sigma_{LV} + \sigma_{LS} - \sigma_{VS}}{2} \geq 0 \\ \sigma_V = \dfrac{\sigma_{LV} + \sigma_{VS} - \sigma_{LS}}{2} \geq 0 \\ \sigma_S = \dfrac{\sigma_{LS} + \sigma_{VS} - \sigma_{LV}}{2} \geq 0 \end{cases}$$

- Les coefficients de mobilité servent à fixer la phase solide

$$\begin{cases} (\nu_{LV}, \nu_{LS}, \nu_{VS}) = (1, 0, 0) \\ (\nu_L, \nu_V, \nu_S) = (2, 2, 0) \end{cases}$$

Reformulation du problème

$$E(\Omega_1, \cdots, \Omega_L) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{L} \sigma_{ij} \mathrm{Aire}(\Gamma_{ij})$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \sigma_k \mathrm{Aire}(\Gamma_k)$$

Reformulation du problème

$$E(\Omega_1, \cdots, \Omega_L) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{L} \sigma_{ij} \mathrm{Aire}(\Gamma_{ij})$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \sigma_k \mathrm{Aire}(\Gamma_k)$$

Modèle (**NMN-CH**) multiphase

L'énergie de Cahn-Hilliard multiphase associée est

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \sigma_k \int \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_k) \right)$$

Le modèle (**NMN-CH**) résultant est

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u_k = \nu_k N(u_k) \operatorname{div} \left(M(u_k) \nabla \left(\sigma_k N(u_k) \mu_k + \lambda \right) \right) \\ \mu_k = W'(u_k) - \varepsilon^2 \Delta u_k \end{cases}$$

Propriétés du modèle

Proche de l'interface Γ_{ij}, la solution u vérifie

$$\begin{cases} u_i = q\left(\dfrac{dist(x,\Omega_i)}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ u_j = 1 - q\left(\dfrac{dist(x,\Omega_i)}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ u_k = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dfrac{1}{\nu_{ij}} V_{ij} = \sigma_{ij}\Delta_\Gamma H_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

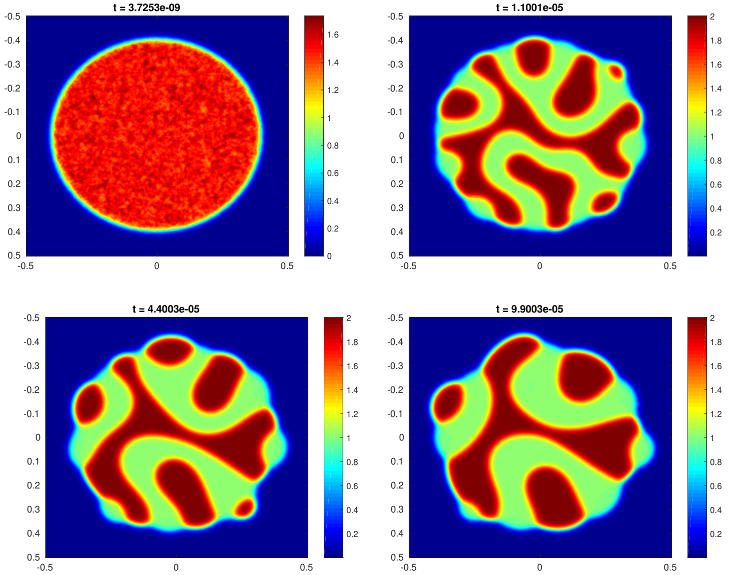
Propriétés du modèle

Proche de l'interface Γ_{ij}, la solution u vérifie

$$\begin{cases} u_i = q\left(\dfrac{dist(x,\Omega_i)}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ u_j = 1 - q\left(\dfrac{dist(x,\Omega_i)}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ u_k = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dfrac{1}{\nu_{ij}} V_{ij} = \sigma_{ij}\Delta_\Gamma H_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

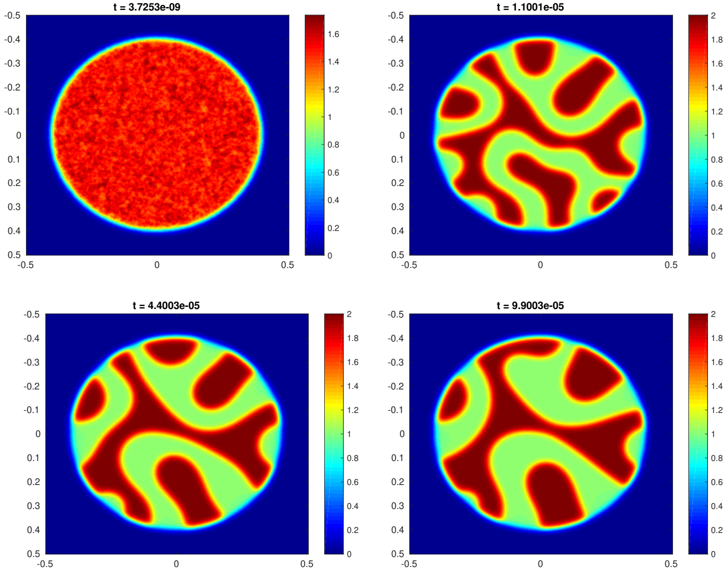
Schéma numérique

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^{n+1} - u_k^{n+1}}{\delta_t} = \nu_k\left[m\Delta - \beta\right]\left(\sigma_k\mu_k^{n+1} + \lambda^{n+1}\right) - \left[m\Delta - \beta\right]\left(\sigma_k\mu_k^n + \lambda^n\right) + \\ \qquad\qquad + \nu_k N(u_k^n)\,\mathrm{div}\left(M(u_k^N)\nabla\left[\sigma_k N(u_k^n)\mu_k^n + \lambda^n\right]\right) \\ \mu_k^{n+1} = \left(-\Delta u_k^{n+1} + \dfrac{\alpha}{\varepsilon^2}u_k^{n+1}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(W'(u_k^n) - \alpha u_k^n\right) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{L} u_k^{n+1} = 1 \qquad \text{(Détermine } \lambda^{n+1}\text{)} \end{cases}$$


t = 3.7253e-09
t = 1.1001e-05
t = 4.4003e-05
t = 9.9003e-05

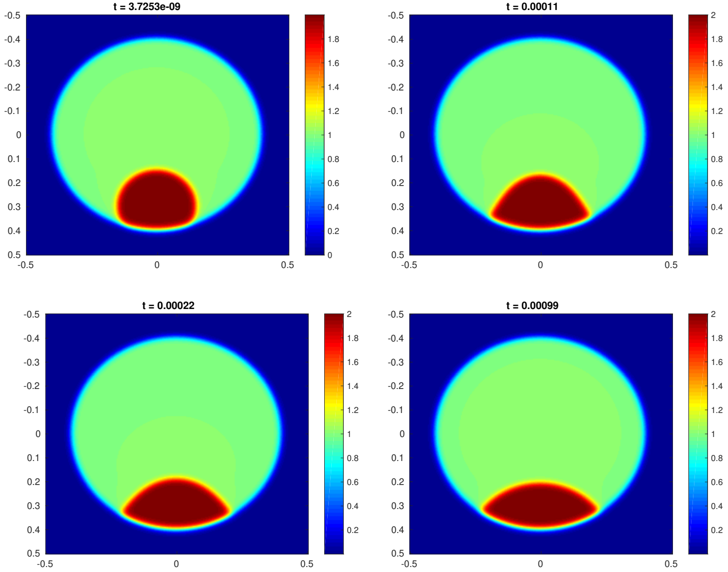
2ème choix

$$\nu_S = 0,\ \nu_L = \nu_V = 1$$



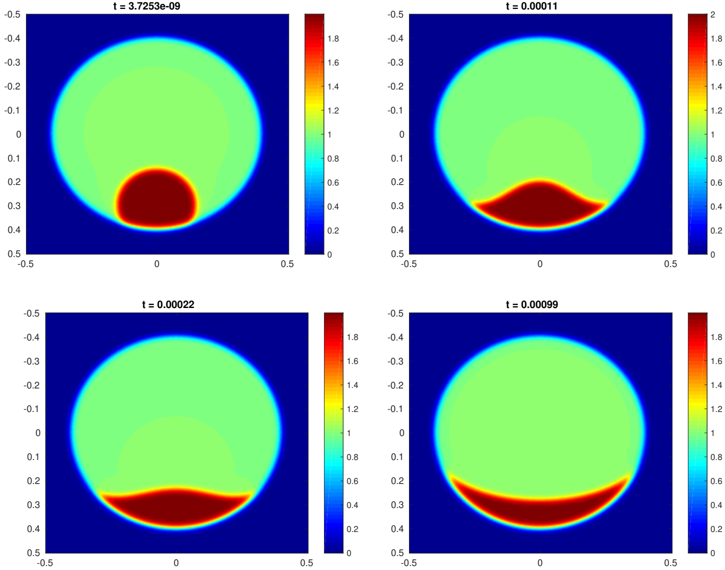
1er choix

$$\sigma_{LS} = \sigma_{VS} = \sigma_{LV} = 1$$



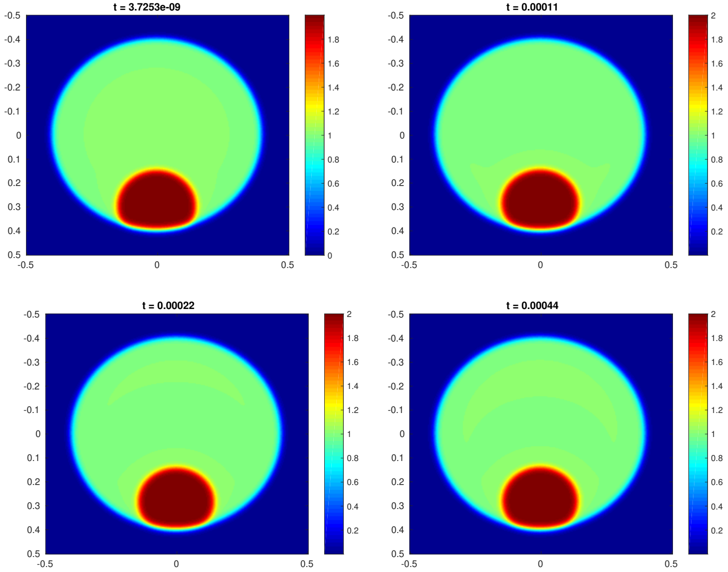
2ème choix

$$\sigma_{VS} = 1.9, \;\; \sigma_{LS} = \sigma_{LV} = 1$$



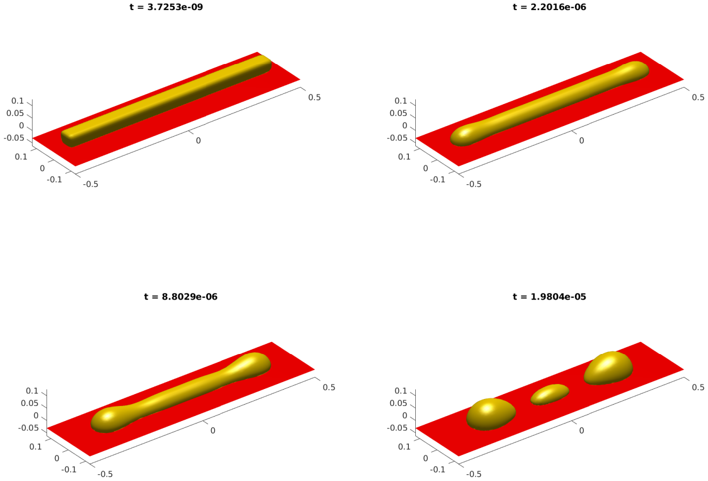
3ème choix

$$\sigma_{LS} = 1.9, \ \sigma_{LV} = \sigma_{VS} = 1$$



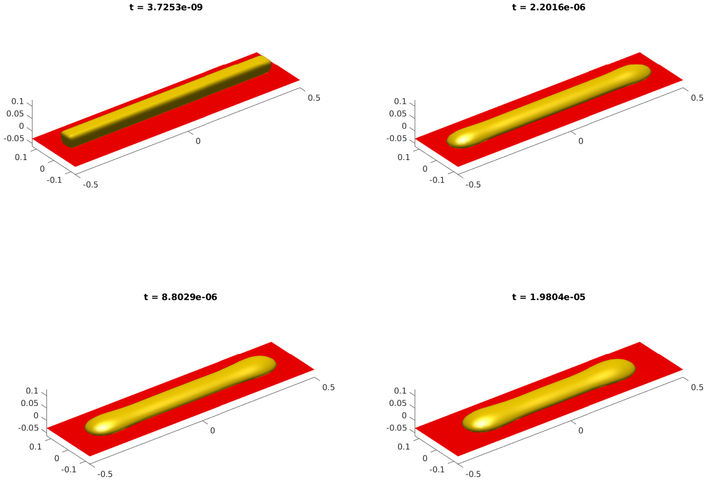
1er choix

$$\sigma_{LS} = \sigma_{VS} = \sigma_{LV} = 1$$



2ème choix

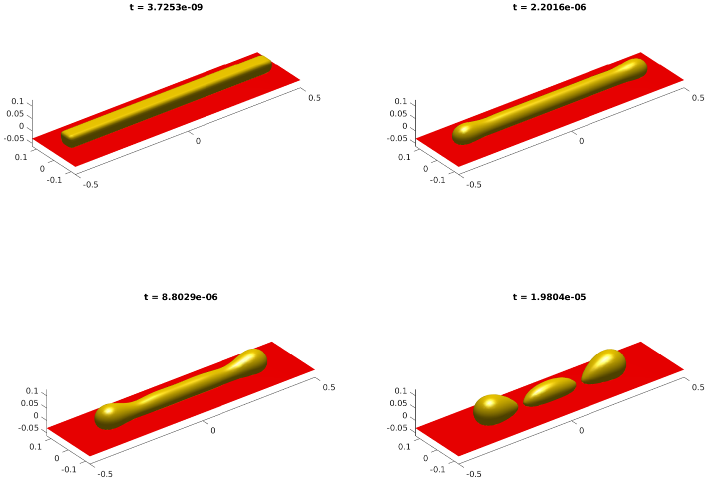
$$\sigma_{VS} = 1.7, \ \sigma_{LS} = \sigma_{LV} = 1$$



Influence de la tension de surface

3ème choix

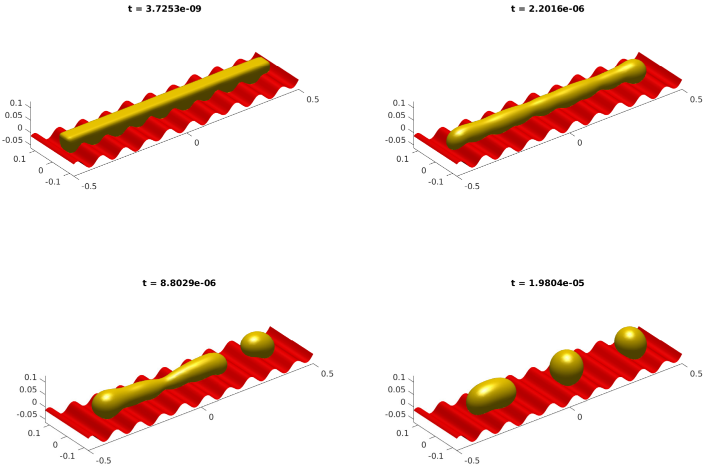
$$\sigma_{LS} = 1.7, \ \sigma_{VS} = \sigma_{LV} = 1$$



Avantage de la méthode

Pas besoin de gérer l'angle de contact avec des conditions aux bords.

1er choix



Avantage de la méthode

Pas besoin de gérer l'angle de contact avec des conditions aux bords.

2ème choix