Un problème isopérimétrique avec compétition entre le périmètre classique et un périmètre non-local

En collaboration avec Benoît Merlet

Marc Pegon

Jeudi 24 juin 2021

Université de Lille
Laboratoire Paul Painlevé

CEMPI CENTRE EUROPÉEN POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET LEURS INTERACTIONS

Université de Lille

Laboratoire Paul Painlevé

Problème

$$\min_{E} \quad \left\{ P(E) + \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:\; |E| = m \right\}$$

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de périmètre fini, $n \geq 2$
- $G(x) = g(|x|) \geq 0$

Problème

$$\min_E \quad \left\{ P(E) + \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ : \ |E| = m \right\}$$

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de périmètre fini, $n \geq 2$
- $G(x) = g(|x|) \geq 0$

▶ Compétition

- P : terme local **attractif**, **minimisé** par les boules
- terme non local **répulsif**, **maximisé** par les boules si $g \searrow$

Motivation

- Modèle de « goutte liquide » de Gamow pour le noyau atomique

$$\min_{E} \quad \left\{ P(E) + \frac{1}{8\pi} \iint_{E\times E} \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ : \ E \subseteq \mathbb{R}^3,\ |E| = m \right\}$$

Motivation

- Modèle de « goutte liquide » de Gamow pour le noyau atomique

$$\min_E \quad \left\{ P(E) + \frac{1}{8\pi} \iint_{E\times E} \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:\; E \subseteq \mathbb{R}^3,\ |E| = m \right\}$$

- $\exists 0 < m_1 \leq m_2$ tq
  - $m < m_1 \implies$ **existence** d'un minimiseur
  - $m > m_2 \implies$ **non-existence** (fission)

Motivation

- Modèle de « goutte liquide » de Gamow pour le noyau atomique

$$\min_{E} \quad \left\{ P(E) + \frac{1}{8\pi} \iint_{E\times E} \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ : \ E \subseteq \mathbb{R}^3,\ |E| = m \right\}$$

- $\exists 0 < m_1 \leq m_2$ tq
  - $m < m_1 \implies$ **existence** d'un minimiseur
  - $m > m_2 \implies$ **non-existence** (fission)
- Généralisations/variantes

Motivation

- Modèle de « goutte liquide » de Gamow pour le noyau atomique

$$\min_{E} \quad \left\{ P(E) + \frac{1}{8\pi} \iint_{E\times E} \frac{1}{|x-y|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \ :\ E \subseteq \mathbb{R}^3,\ |E| = m \right\}$$

- $\exists 0 < m_1 \leq m_2$ tq
  - $m < m_1 \implies$ **existence** d'un minimiseur
  - $m > m_2 \implies$ **non-existence** (fission)
- Généralisations/variantes
  - **Riesz**[1] : $\mathcal{R}_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$, $\alpha \in (0, n)$, **non intégrable** à l'infini
    - ↳ $\forall \alpha \in (0, n)$, $\exists m_0 > 0$, ($m < m_0 \implies [B]_m$ **unique minimiseur**)
    - ↳ $\forall \alpha \in [n-2, n)$, $\exists m_2 > 0$, ($m > m_2 \implies$ **non-existence**)

[1] Knüpfer, Muratov, Julin, Figalli, Fusco, Maggi, Millot, Morini, Lu, Otto, Bonacini, Cristoferi

Motivation

- Modèle de « goutte liquide » de Gamow pour le noyau atomique

$$\min_E \quad \left\{ P(E) + \frac{1}{8\pi} \iint_{E\times E} \frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:\; E \subseteq \mathbb{R}^3,\ |E| = m \right\}$$

- $\exists 0 < m_1 \leq m_2$ tq
  - $m < m_1 \implies$ **existence** d'un minimiseur
  - $m > m_2 \implies$ **non-existence** (fission)
- Généralisations/variantes
  - **Riesz**[1] : $\mathcal{R}_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$, $\alpha \in (0,n)$, **non intégrable** à l'infini
    - ↳ $\forall \alpha \in (0,n)$, $\exists m_0 > 0$, ($m < m_0 \implies [B]_m$ **unique minimiseur**)
    - ↳ $\forall \alpha \in [n-2,n)$, $\exists m_2 > 0$, ($m > m_2 \implies$ **non-existence**)
  - G à **support compact** : toujours existence[2]

[1] Knüpfer, Muratov, Julin, Figalli, Fusco, Maggi, Millot, Morini, Lu, Otto, Bonacini, Cristoferi

[2] Rigot 2000a

Noyaux fortement décroissants

- Noyaux de Bessel $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}$ proposés[3], $\alpha, \kappa > 0$.
  - solution de $(\mathrm{Id} - \kappa\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \delta_0$
  - $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}(x) \sim_0 C_{\kappa,n}\mathcal{R}_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, n)$
  - décroissance exponentielle à l'infini $\implies \mathcal{B}_{\alpha,\kappa} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

[3] Knüpfer, Muratov et Novaga 2016

Noyaux fortement décroissants

- Noyaux de Bessel $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}$ proposés[3], $\alpha, \kappa > 0$.
  - solution de $(\mathrm{Id} - \kappa\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \delta_0$
  - $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}(x) \sim_0 C_{\kappa,n}\mathcal{R}_\alpha(x)$, $\alpha \in (0,n)$
  - décroissance exponentielle à l'infini $\implies \mathcal{B}_{\alpha,\kappa} \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- G assez « décroissant » à l'∞

  $\implies$ existence de minimiseurs de grande masse ?

[3] Knüpfer, Muratov et Novaga 2016

Noyaux fortement décroissants

- Noyaux de Bessel $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}$ proposés[3], $\alpha, \kappa > 0$.
  - solution de $(\mathrm{Id} - \kappa\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \delta_0$
  - $\mathcal{B}_{\alpha,\kappa}(x) \sim_0 C_{\kappa,n}\mathcal{R}_\alpha(x)$, $\alpha \in (0, n)$
  - décroissance exponentielle à l'infini $\implies \mathcal{B}_{\alpha,\kappa} \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- G assez « décroissant » à l'∞

  $\implies$ existence de minimiseurs de grande masse ?
- Hypothèses générales sur G
  1. $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, radial
  2. $|x|G(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et (quitte à $G \rightsquigarrow \gamma G$), on fixe

$$I_G^1 := \int_{\mathbb{R}^n} |x| G(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{K}_n$$

[3] Knüpfer, Muratov et Novaga 2016

Reformulation du problème

- On a

$$\iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|E| - \iint_{E\times E^{\mathrm{c}}} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

Reformulation du problème

- On a

$$\iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|E| - \underbrace{\iint_{E\times E^c} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{P_G(E)},$$

Reformulation du problème

- On a

$$\iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|E| - \underbrace{\iint_{E\times E^c} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{P_G(E)},$$

donc

$$\min_E \quad \left\{ P(E) + \gamma \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:\; |E| = m \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_E \quad \left\{ P(E) - \gamma\, P_G(E) \;:\; |E| = m \right\}$$

Reformulation du problème

- On a

$$\iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|E| - \underbrace{\iint_{E\times E^c} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{P_G(E)},$$

donc

$$\min_E \quad \left\{P(E) + \gamma \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:\; |E| = m\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_E \quad \left\{P(E) - \gamma\, P_G(E) \;:\; |E| = m\right\}$$

$$\Updownarrow \quad \text{rescaling}$$

$$\min_E \quad \left\{P(E) - \gamma\, P_{G_\varepsilon}(E) \;:\; |E| = |B_1|\right\}, \tag{$\star$}$$

avec $\varepsilon := \left(\frac{|B_1|}{m}\right)^{1/n}$, $G_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-(n+1)} G(\varepsilon^{-1}x)$.

Reformulation du problème

- On a

$$\iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|E| - \underbrace{\iint_{E\times E^c} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{P_G(E)},$$

donc

$$\min_E \quad \left\{ P(E) + \gamma \iint_{E\times E} G(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ : \ |E| = m \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_E \quad \left\{ P(E) - \gamma\, P_G(E) \ : \ |E| = m \right\}$$

$$\Updownarrow \quad \text{rescaling}$$

$$\min_E \quad \left\{ P(E) - \gamma\, P_{G_\varepsilon}(E) \ : \ |E| = |B_1| \right\}, \qquad (\star)$$

avec $\varepsilon := \left(\frac{|B_1|}{m}\right)^{1/n}$, $G_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-(n+1)} G(\varepsilon^{-1}x)$.

- $m \to \infty \iff \varepsilon \to 0$.

- Imaginons $\operatorname{spt} G \subseteq B_1$, alors

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \iint_{\substack{x,y \in (B_\varepsilon + \partial E) \\ E \times E^{\mathrm{c}}}} G_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \simeq \quad \text{périmètre}$$

Périmètre non-local

- Imaginons $\operatorname{spt} G \subseteq B_1$, alors

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \iint\limits_{\substack{x,y\in(B_\varepsilon+\partial E)\\ E\times E^{\mathrm{c}}}} G_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \simeq \quad \text{périmètre}$$

- Posant $\rho(t) := tg(t)$, $\rho_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}t)$, on a

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{1}_E(x)-\mathbf{1}_E(y)|}{|x-y|}\rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Périmètre non-local

- Imaginons $\operatorname{spt} G \subseteq B_1$, alors

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \iint_{\substack{x,y\in(B_\varepsilon+\partial E)\\ E\times E^{\mathrm{c}}}} G_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \simeq \quad \text{périmètre}$$

- Posant $\rho(t) := tg(t)$, $\rho_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}t)$, on a

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{1}_E(x)-\mathbf{1}_E(y)|}{|x-y|}\rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Big\downarrow \leq \quad \varepsilon \to 0^4 \quad \text{(choix de } \mathbf{K}_n\text{)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\mathbf{1}_E| = P(E)$$

[4] Bourgain, Brezis et Mironescu 2001; Dávila 2002

- Imaginons $\operatorname{spt} G \subseteq B_1$, alors

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \iint\limits_{\substack{x,y \in (B_\varepsilon + \partial E) \\ E \times E^c}} G_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \simeq \quad \text{périmètre}$$

- Posant $\rho(t) := tg(t)$, $\rho_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}t)$, on a

$$P_{G_\varepsilon}(E) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|\mathbf{1}_E(x) - \mathbf{1}_E(y)|}{|x-y|}\rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\Big\downarrow \text{\scriptsize$\wr\!\wedge$} \quad \varepsilon \to 0^4 \quad \text{(choix de } \mathbf{K}_n\text{)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\mathbf{1}_E| = P(E)$$

- $(P - \gamma P_{G_\varepsilon})(E) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} (1-\gamma)P(E)$.

[4] Bourgain, Brezis et Mironescu 2001; Dávila 2002

Théorème (M.P. 2020)

Si $\gamma < 1$, il existe $\varepsilon_e = \varepsilon_e(n, \gamma, G)$ tq, $\forall \varepsilon < \varepsilon_e$, $(\star)$ admet un minimiseur. De plus, pour $\varepsilon < \varepsilon_e$, tout minimiseur E_ε est ***connexe*** *et vérifie, à translation près,*

$$\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq E_\varepsilon \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)},$$

où $\delta(\varepsilon) \to 0$.

Théorème (M.P. 2020)

Si $\gamma < 1$, il existe $\varepsilon_e = \varepsilon_e(n, \gamma, G)$ tq, $\forall \varepsilon < \varepsilon_e$, $(\star)$ admet un minimiseur. De plus, pour $\varepsilon < \varepsilon_e$, tout minimiseur E_ε est ***connexe*** *et vérifie, à translation près,*

$$\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq E_\varepsilon \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)},$$

où $\delta(\varepsilon) \to 0$.

- Tout minimiseur E_ε est quasi-minimiseur du périmètre, c-à-d

$$P(E_\varepsilon; B_r(x)) \leq P(F; B_r(x)) + \frac{\Lambda(n, G, \gamma)}{\varepsilon}|E_\varepsilon \triangle F|,$$

pour tout F t.q. $E_\varepsilon \triangle F \subset\subset B_r(x)$.

Théorème (M.P. 2020)

Si $\gamma < 1$, il existe $\varepsilon_e = \varepsilon_e(n, \gamma, G)$ tq, $\forall \varepsilon < \varepsilon_e$, $(\star)$ admet un minimiseur. De plus, pour $\varepsilon < \varepsilon_e$, tout minimiseur E_ε est ***connexe*** *et vérifie, à translation près,*

$$\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq E_\varepsilon \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)},$$

où $\delta(\varepsilon) \to 0$.

- Tout minimiseur E_ε est quasi-minimiseur du périmètre, c-à-d

$$P(E_\varepsilon; B_r(x)) \leq P(F; B_r(x)) + \frac{\Lambda(n, G, \gamma)}{\varepsilon} |E_\varepsilon \triangle F|,$$

pour tout F t.q. $E_\varepsilon \triangle F \subset\subset B_r(x)$.

- $\implies$ régularité partielle[5] (non-uniforme) : ∂E_ε est loc. $C^{1,\frac{1}{2}}$ en-dehors d'un ensemble de dimension $\leq n-8$

[5] Tamanini 1982, Ambrosio et Paolini 1999, Rigot 2000a,b

Existence & CV

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma\, P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma\, P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

↳ Si $\boldsymbol{E_k} \xrightarrow{\boldsymbol{L^1(\mathbb{R}^n)}} \boldsymbol{E}$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) = \inf \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ par s.c.i. et $|E| = |B_1|$
$\implies$ **existence** de minimiseur

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma\, P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

↳ Si $\boldsymbol{E_k} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} \boldsymbol{E}$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) = \inf \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ par s.c.i. et $|E| = |B_1|$
$\implies$ **existence** de minimiseur

- Or

$$\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_k) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)$$

$$\implies \qquad P(E_k) - P(B_1) \qquad \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(P(B_1) - P_{G_\varepsilon}(B_1) \right)$$

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma\, P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

↳ Si $\boldsymbol{E_k} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} \boldsymbol{E}$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) = \inf \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ par s.c.i. et $|E| = |B_1|$
$\implies$ **existence** de minimiseur

- Or

$$\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_k) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)$$

$$\implies \underbrace{P(E_k) - P(B_1)}_{D(E_k)=\text{déficit isopérimétrique}} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(P(B_1) - P_{G_\varepsilon}(B_1) \right)$$

Existence & CV

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma\, P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

↳ Si $E_k \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} E$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) = \inf \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ par s.c.i. et $|E| = |B_1|$
$\implies$ **existence** de minimiseur

- Or

$$\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_k) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)$$

$$\implies \underbrace{P(E_k) - P(B_1)}_{D(E_k)=\text{déficit isopérimétrique}} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\Big(\underbrace{P(B_1) - P_{G_\varepsilon}(B_1)}_{\longrightarrow\, 0} \Big)$$

Existence & CV

- On pose $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} := P - \gamma P_{G_\varepsilon}$
- ε petit fixé, (E_k) suite minimisante

↳ Si $E_k \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} E$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) = \inf \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ par s.c.i. et $|E| = |B_1|$
$\implies$ **existence** de minimiseur

- Or

$$\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_k) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)$$

$$\implies \underbrace{P(E_k) - P(B_1)}_{D(E_k)=\text{déficit isopérimétrique}} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\Big(\underbrace{P(B_1) - P_{G_\varepsilon}(B_1)}_{\longrightarrow 0} \Big)$$

- D'où (E_k) bornée dans BV

$\implies$ CV L^1_{loc} : ⚠ masse peut s'échapper à l'∞

Minimalité de B_1 ?

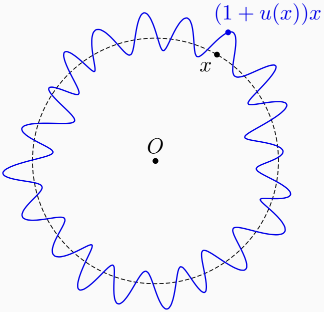
- *Conjecture* : pour $\gamma < 1$, $\exists \varepsilon_* > 0,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_*$, B_1 est l'unique minimiseur de $(\star)$?

Minimalité de B_1 ?

- *Conjecture* : pour $\gamma < 1$, $\exists \varepsilon_* > 0,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_*$, B_1 est l'unique minimiseur de $(\star)$?
- **Vrai** parmi les ensembles α-**quasi-sphériques** $E \subseteq \mathbb{R}^n$, α petit :

Minimalité de B_1 ?

- *Conjecture* : pour $\gamma < 1$, $\exists \varepsilon_* > 0,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_*$, B_1 est l'unique minimiseur de $(\star)$?
- **Vrai** parmi les ensembles α-**quasi-sphériques** $E \subseteq \mathbb{R}^n$, α petit :



- $|E| = |B_1|$, $\int_E x \, \mathrm{d}x = 0$
- $\partial E = \left\{ (1+u(x))x : x \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}$
- $u \in \mathbf{Lip}(\mathbb{S}^{n-1})$
  avec $\|u\|_\infty + \|\nabla_\tau u\|_\infty \leq \alpha$.

Minimalité de B_1 en dimension 2

Proposition (Convexité)

*Supposons $n = 2$ et $\gamma < 1$. Il existe $\varepsilon_* = \varepsilon_*(G, \gamma)$ t.q. pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$, tout minimiseur de ($\star$) est **convexe**.*

Proposition (Convexité)

*Supposons $n = 2$ et $\gamma < 1$. Il existe $\varepsilon_* = \varepsilon_*(G, \gamma)$ t.q. pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$, tout minimiseur de $(\star)$ est **convexe**.*

- Convergence Hausdorff du bord $\implies$ convergence $W^{1,\infty}$
  ↳ tout minimiseur E_ε est $\alpha(\varepsilon)$-quasi-sphérique, où $\alpha(\varepsilon) \to 0$.

Minimalité de B_1 en dimension 2

Proposition (Convexité)

*Supposons $n = 2$ et $\gamma < 1$. Il existe $\varepsilon_* = \varepsilon_*(G, \gamma)$ t.q. pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$, tout minimiseur de $(\star)$ est **convexe**.*

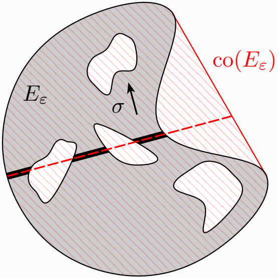
- Convergence Hausdorff du bord $\implies$ convergence $W^{1,\infty}$
  ↳ tout minimiseur E_ε est $\alpha(\varepsilon)$-quasi-sphérique, où $\alpha(\varepsilon) \to 0$.

Théorème (Minimalité)

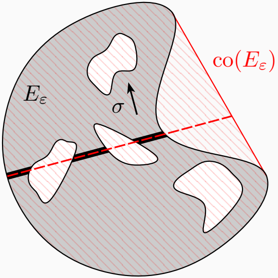
Supposons $n = 2$ et $\gamma < 1$. Il existe $\varepsilon_* = \varepsilon_*(G, \gamma)$ t.q. pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$, l'unique minimiseur de $(\star)$ est B_1.

Convexité des minimiseurs

- Par slicing : pour chaque direction $\sigma \in \mathbb{S}^1$:



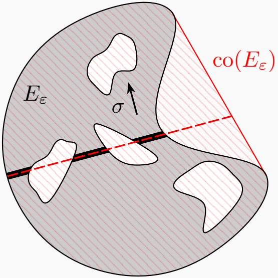
- Par slicing : pour chaque direction $\sigma \in \mathbb{S}^1$:



- $\mathcal{E}_\varepsilon^1 := P^1 - P_\varepsilon^1$ fonctionnelle « critique » 1D
  ↳ on a $\mathcal{E}_\varepsilon^1($———$) \leq \mathcal{E}_\varepsilon^1($ - - - $)$

Convexité des minimiseurs

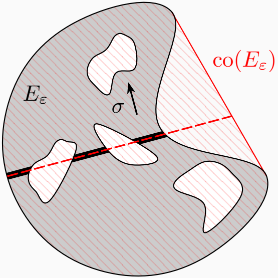
- Par slicing : pour chaque direction $\sigma \in \mathbb{S}^1$:



- $\mathcal{E}^1_\varepsilon := P^1 - P^1_\varepsilon$ fonctionnelle « critique » 1D
  ↳ on a $\mathcal{E}^1_\varepsilon($———$) \leq \mathcal{E}^1_\varepsilon($ - - - $)$
- ⚠ si E_ε non convexe, $|\mathrm{co}(E_\varepsilon)| > |B_1|$

Convexité des minimiseurs

- Par slicing : pour chaque direction $\sigma \in \mathbb{S}^1$:



- $\mathcal{E}^1_\varepsilon := P^1 - P^1_\varepsilon$ fonctionnelle « critique » 1D
  ↳ on a $\mathcal{E}^1_\varepsilon($——$) \leq \mathcal{E}^1_\varepsilon($ - - - $)$
- ⚠ si E_ε non convexe, $|\mathrm{co}(E_\varepsilon)| > |B_1|$
  ↳ pour $|t_\varepsilon \mathrm{co}(E_\varepsilon)| = |B_1|$, $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(t_\varepsilon \mathrm{co}(E_\varepsilon)) < \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_\varepsilon)$
  $\implies E_\varepsilon$ convexe

Merci.

Variations 1ère et 2nde

- Étant donné $X \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, et son flot $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)) \\ \Phi_0(x) = x, \end{cases}$$

  on définit $E_t := \Phi_t(E)$.

Variations 1ère et 2nde

- Étant donné $X \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, et son flot $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$$\begin{cases} \partial_t \, \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)) \\ \Phi_0(x) = x, \end{cases}$$
on définit $E_t := \Phi_t(E)$.
- Pour E à bord C^2 et X dont le flot préserve $|E|$, on définit
$$\delta \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)[X] := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_t)$$
$$\delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)[X] := \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_t).$$

Variations 1ère et 2nde

- Étant donné $X \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, et son flot $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$$\begin{cases} \partial_t \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)) \\ \Phi_0(x) = x, \end{cases}$$
on définit $E_t := \Phi_t(E)$.
- Pour E à bord C^2 et X dont le flot préserve $|E|$, on définit
$$\delta \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)[X] := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_t)$$
$$\delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)[X] := \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_t).$$
- B_1 est un point critique de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$, c-à-d
$$\delta \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] = 0$$
pour tout X dont le flot préserve le volume.

Seuil de stabilité de la boule

Définition

On dit que B_1 est un point critique **stable** de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ si pour tout X dont le flot préserve le volume de B_1, on a $\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$.

Seuil de stabilité de la boule

Définition

On dit que B_1 est un point critique **stable** de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ si pour tout X dont le flot préserve le volume de B_1, on a $\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$.

Proposition

Il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n,\gamma,G) > 0$ tel que

- *si $\gamma > 1$, B_1 est un point critique* ***instable*** *de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$;*
- *si $\gamma < 1$, B_1 est un point critique* ***stable*** *de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$.*

Seuil de stabilité de la boule

Définition

On dit que B_1 est un point critique **stable** de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ si pour tout X dont le flot préserve le volume de B_1, on a $\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$.

Proposition

Il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, \gamma, G) > 0$ tel que

- *si $\gamma > 1$, B_1 est un point critique **instable** de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$;*
- *si $\gamma < 1$, B_1 est un point critique **stable** de $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$.*

- Si G est à support compact et $\gamma > 1$, pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, $(\star)$ admet un minimiseur qui n'est pas B_1

Stabilité/instabilité de B_1

- Si le flot de X préserve le volume de B_1, on a

- Si le flot de X préserve le volume de B_1, on a

$$\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} - \left(c^2_{\mathbb{S}^{n-1}} - \gamma\, c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}}\right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_X^2 \, d\mathscr{H}^{n-1}$$
$$-\gamma \iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u_X(x)-u_X(y)|^2}{|x-y|^2} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}^{n-1}_x \, d\mathscr{H}^{n-1}_y.$$

où $u_X := (X \cdot \nu_{B_1})$

Stabilité/instabilité de B_1

- Si le flot de X préserve le volume de B_1, on a

$$\begin{aligned}
&\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} - \left(c^2_{\mathbb{S}^{n-1}} - \gamma\, c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}}\right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_X^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} \\
&\quad -\gamma \iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u_X(x)-u_X(y)|^2}{|x-y|^2} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}^{n-1}_x \, d\mathscr{H}^{n-1}_y .
\end{aligned}$$

où $u_X := (X \cdot \nu_{B_1})$, et

$$c^2_{\mathbb{S}^{n-1}} = n-1, \qquad c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}^{n-1}_y, \quad \forall y \in \mathbb{S}^{n-1},$$

$$\eta(r) = r^2 g(r), \qquad \eta_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-(n-1)}\eta(\varepsilon^{-1} r).$$

Stabilité/instabilité de B_1

- Si le flot de X préserve le volume de B_1, on a

$$\begin{aligned}
&\delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} - \left(c_{\mathbb{S}^{n-1}}^2 - \gamma \, c_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}}^2 \right) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_X^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} \\
&\quad -\gamma \iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u_X(x) - u_X(y)|^2}{|x-y|^2} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}_x^{n-1} \, d\mathscr{H}_y^{n-1}.
\end{aligned}$$

où $u_X := (X \cdot \nu_{B_1})$, et

$$c_{\mathbb{S}^{n-1}}^2 = n-1, \qquad c_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}}^2 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}_y^{n-1}, \quad \forall y \in \mathbb{S}^{n-1},$$

$$\eta(r) = r^2 g(r), \qquad \eta_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-(n-1)} \eta(\varepsilon^{-1} r).$$

- $(\eta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ **approximation de l'identité** en dim. $(n-1)$

Instabilité pour $\gamma > 1$

Proposition

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$*,*

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Instabilité pour $\gamma > 1$

Proposition

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

- $$c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}} = \fint_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_y\,d\mathscr{H}^{n-1}_x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} n-1 = c^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Instabilité pour $\gamma > 1$

Proposition

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

- $$c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}} = \fint_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_y\,d\mathscr{H}^{n-1}_x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} n-1 = c^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$$
- Ainsi $\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X]$
$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} (1-\gamma)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\nabla_\tau u_X|^2\,d\mathscr{H}^{n-1} - c^2_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_X^2\,d\mathscr{H}^{n-1}\right)$$

Instabilité pour $\gamma > 1$

Proposition

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

- $$c^2_{\varepsilon,\mathbb{S}^{n-1}} = \fint_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_y\,d\mathscr{H}^{n-1}_x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} n-1 = c^2_{\mathbb{S}^{n-1}}$$
- Ainsi $\delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X]$
$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} (1-\gamma)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2\,d\mathscr{H}^{n-1} - c^2_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_X^2\,d\mathscr{H}^{n-1}\right)}_{\delta^2 P(B_1)[X] > 0}$$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
  ↳ on veut ε_1 t.q., $\varepsilon < \varepsilon_1 \implies \forall X, \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
  ↳ on veut ε_1 t.q., $\varepsilon < \varepsilon_1 \implies \forall X, \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
- Décomposition en **harmoniques sphériques**

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
  ↳ on veut ε_1 t.q., $\varepsilon < \varepsilon_1 \implies \forall X, \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
- Décomposition en **harmoniques sphériques**
  - $\mathcal{S}_k$: harmoniques sphériques de degré k, $(Y_k^i)_{i \in \{1,\dots,d(k)\}}$ base de $\mathcal{S}_k$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
  ↳ on veut ε_1 t.q., $\varepsilon < \varepsilon_1 \implies \forall X, \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
- Décomposition en **harmoniques sphériques**
  - $\mathcal{S}_k$: harmoniques sphériques de degré k, $(Y_k^i)_{i\in\{1,\dots,d(k)\}}$ base de $\mathcal{S}_k$
  - $u_X = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d(k)} a_k^i(u_X) Y_k^i$

$$\implies \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d(k)} l_k a_k^i(u_X)^2, \qquad l_k = k(k+n-2)$$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (1)

- Pour tout X, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
  ↳ on veut ε_1 t.q., $\varepsilon < \varepsilon_1 \implies \forall X, \delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq 0$
- Décomposition en **harmoniques sphériques**
  - $\mathcal{S}_k$: harmoniques sphériques de degré k, $(Y_k^i)_{i \in \{1,\dots,d(k)\}}$ base de $\mathcal{S}_k$
  - $u_X = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d(k)} a_k^i(u_X) Y_k^i$

$$\implies \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u_X|^2 \, d\mathscr{H}^{n-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d(k)} l_k a_k^i(u_X)^2, \qquad l_k = k(k+n-2)$$

- Par la formule de Funk-Hekke

$$\delta^2 \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] = \sum_{k=\mathbf{2}}^{\infty} \sum_{i=1}^{d(k)} (l_k - \gamma \mu_{\varepsilon,k} - (l_1 - \gamma \mu_{\varepsilon,1})) a_k^i(u)^2$$

où

$$\mu_{\varepsilon,k} = \iint_{\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}} \frac{|Y_k(x) - Y_k(y)|^2}{|x-y|^2} \eta_\varepsilon(|x-y|) \, d\mathscr{H}_x^{n-1} \, d\mathscr{H}_y^{n-1}$$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (2)

Proposition

On a

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\, d\mathscr{H}^{n-1}_x\, d\mathscr{H}^{n-1}_y \leq (1+q_\eta(\varepsilon)) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\, d\mathscr{H}^{n-1},$$

où $q_\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ *ne dépend que de* n *et* G.

Stabilité pour $\gamma < 1$ (2)

Proposition

On a

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \leq (1+q_\eta(\varepsilon))\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1},$$

où $q_\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ *ne dépend que de* n *et* G*.*

- Donc $\mu_{\varepsilon,k} \leq (1+q_\eta(\varepsilon))l_k$, et d'autre part $\mu_{\varepsilon,1} = l_1 + o(1)$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (2)

Proposition

On a

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mathscr{H}^{n-1}_x\,d\mathscr{H}^{n-1}_y \leq (1+q_\eta(\varepsilon))\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\,d\mathscr{H}^{n-1},$$

où $q_\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ *ne dépend que de* n *et* G.

- Donc $\mu_{\varepsilon,k} \leq (1+q_\eta(\varepsilon))l_k$, et d'autre part $\mu_{\varepsilon,1} = l_1 + o(1)$

$$\implies \delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{d(k)}\Big[\underbrace{l_k(1-\gamma(1+q_\eta(\varepsilon))-l_1(1-\gamma(1+o(1)))}_{\geq (l_2-l_1)(1-\gamma)+o(1)>0}\Big]a_k^i(u)^2$$

Stabilité pour $\gamma < 1$ (2)

Proposition

On a

$$\iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\eta_\varepsilon(|x-y|)\, d\mathscr{H}^{n-1}_x\, d\mathscr{H}^{n-1}_y \leq (1+q_\eta(\varepsilon)) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_\tau u|^2\, d\mathscr{H}^{n-1},$$

où $q_\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ *ne dépend que de* n *et* G.

- Donc $\mu_{\varepsilon,k} \leq (1+q_\eta(\varepsilon))l_k$, et d'autre part $\mu_{\varepsilon,1} = l_1 + o(1)$

$$\implies \delta^2\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1)[X] \geq \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{d(k)} \Big[\underbrace{l_k(1-\gamma(1+q_\eta(\varepsilon)) - l_1(1-\gamma(1+o(1)))}_{\geq (l_2-l_1)(1-\gamma)+o(1)>0}\Big] a_k^i(u)^2$$

$\implies$ stabilité pour ε petit

Diminution de l'énergie par convexification (1)

- On pose $\mathcal{E}_G := P - P_G$, de sorte que $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} = (1-\gamma)P + \gamma\mathcal{E}_{G_\varepsilon}$.

Diminution de l’énergie par convexification (1)

- On pose $\mathcal{E}_G := P - P_G$, de sorte que $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} = (1-\gamma)P + \gamma\mathcal{E}_{G_\varepsilon}$.
- On peut réécrire

$$P(E) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} P^1(E_{\sigma,t})\,\mathrm{d}t\,d\mathscr{H}^1(\sigma),$$

où $P^1(E_{\sigma,t}) = \mathscr{H}^0(\partial E_{\sigma,t})$, et

$$E_{\sigma,t} := \Big\{ s \in \mathbb{R} \ :\ t\sigma^\perp + s\sigma \in E \Big\},$$

Diminution de l'énergie par convexification (1)

- On pose $\mathcal{E}_G := P - P_G$, de sorte que $\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon} = (1-\gamma)P + \gamma\mathcal{E}_{G_\varepsilon}$.
- On peut réécrire

$$P(E) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} P^1(E_{\sigma,t})\,\mathrm{d}t\,d\mathscr{H}^1(\sigma),$$

où $P^1(E_{\sigma,t}) = \mathscr{H}^0(\partial E_{\sigma,t})$, et

$$E_{\sigma,t} := \Big\{s \in \mathbb{R} \;:\; t\sigma^\perp + s\sigma \in E\Big\},$$

- Posant $\rho(r) = rg(r)$,

$$\begin{aligned} P_G(E) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_{\sigma,t}\times E_{\sigma,t}^{\mathrm{c}}} |r-s|g(|r-s|)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,d\mathscr{H}^1(\sigma) \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} P^1_\rho(E_{\sigma,t})\,\mathrm{d}t\,d\mathscr{H}^1(\sigma). \end{aligned}$$

Diminution de l'énergie par convexification (2)

- Donc avec $\mathcal{E}^1_\rho := P^1 - P^1_\rho$,

$$\mathcal{E}_G(E) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}^1_\rho(E_{\sigma,t})\,\mathrm{d}t\, d\mathscr{H}^1(\sigma)$$

Diminution de l'énergie par convexification (2)

- Donc avec $\mathcal{E}_\rho^1 := P^1 - P_\rho^1$,

$$\mathcal{E}_G(E) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_\rho^1(E_{\sigma,t}) \,\mathrm{d}t \, d\mathscr{H}^1(\sigma)$$

Proposition (Convexification en dim. 1)

Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble borné de périmètre fini, alors pour tout intervalle I contenant J, on a

$$\mathcal{E}_\rho^1(J) \leq \mathcal{E}_\rho^1(I).$$

Diminution de l'énergie par convexification (2)

- Donc avec $\mathcal{E}^1_\rho := P^1 - P^1_\rho$,

$$\mathcal{E}_G(E) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}^1_\rho(E_{\sigma,t}) \, \mathrm{d}t \, d\mathscr{H}^1(\sigma)$$

Proposition (Convexification en dim. 1)

Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble borné de périmètre fini, alors pour tout intervalle I contenant J, on a

$$\mathcal{E}^1_\rho(J) \leq \mathcal{E}^1_\rho(I).$$

- Conséquence : si $E \subseteq \mathbb{R}^2$ est connexe, $\mathcal{E}_G(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{E}_G(E)$

Diminution de l'énergie par convexification (2)

- Donc avec $\mathcal{E}_\rho^1 := P^1 - P_\rho^1$,

$$\mathcal{E}_G(E) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_\rho^1(E_{\sigma,t}) \, \mathrm{d}t \, d\mathscr{H}^1(\sigma)$$

Proposition (Convexification en dim. 1)

Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble borné de périmètre fini, alors pour tout intervalle I contenant J, on a

$$\mathcal{E}_\rho^1(J) \leq \mathcal{E}_\rho^1(I).$$

- Conséquence : si $E \subseteq \mathbb{R}^2$ est connexe, $\mathcal{E}_G(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{E}_G(E)$
  $\implies \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)$

Diminution de l'énergie par convexification (2)

- Donc avec $\mathcal{E}^1_\rho := P^1 - P^1_\rho$,
$$\mathcal{E}_G(E) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}^1_\rho(E_{\sigma,t})\,\mathrm{d}t\,d\mathscr{H}^1(\sigma)$$

Proposition (Convexification en dim. 1)

Si $J \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble borné de périmètre fini, alors pour tout intervalle I contenant J, on a
$$\mathcal{E}^1_\rho(J) \leq \mathcal{E}^1_\rho(I).$$

- Conséquence : si $E \subseteq \mathbb{R}^2$ est connexe, $\mathcal{E}_G(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{E}_G(E)$
  $\implies \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)$
- ⚠ $|\mathrm{co}(E)| > |E|$?

Diminution par redimensionnement d’un convexe (1)

- On a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$
où

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$
où
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\ & P_{G_\varepsilon}(tE) \\ & - \int_E \int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\, d\mathscr{H}^1_y \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$
où
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\,\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq\, tP(E)}$$
$$- \int_E \int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$

où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\,\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq\, tP(E)} - \underbrace{\int_E\int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x}_{=:\,\frac{1}{t}R_\varepsilon(tE)}$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$

  où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\,\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq\, tP(E)} - \underbrace{\int_E\int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x}_{=:\,\frac{1}{t}R_\varepsilon(tE)}$$

- Si E **convexe fixé** à bord C^2

$$R_\varepsilon(E) = \int_{\partial E}\int_E G_\varepsilon(x-y)\,\underbrace{(y-x)\cdot\nu_E(y)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x\,d\mathscr{H}^1_y$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$

où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\,\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq tP(E)} \\ - \underbrace{\int_E\int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x}_{=:\,\frac{1}{t}R_\varepsilon(tE)}$$

- Si E **convexe fixé** à bord C^2

$$R_\varepsilon(E) = \int_{\partial E}\int_E G_\varepsilon(x-y)\underbrace{(y-x)\cdot\nu_E(y)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x\,d\mathscr{H}^1_y \\ \simeq \int_{\partial E}\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^2\,:\,(y-x)\cdot\nu_E(y)>0\}} G_\varepsilon(x-y)(y-x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \quad P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]$$

où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq tP(E)}$$
$$- \underbrace{\int_E \int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x}_{=:\ \frac{1}{t}R_\varepsilon(tE)}$$

- Si E **convexe fixé** à bord C^2

$$R_\varepsilon(E) = \int_{\partial E}\int_E G_\varepsilon(x-y)\underbrace{(y-x)\cdot\nu_E(y)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x\,d\mathscr{H}^1_y$$
$$\simeq \int_{\partial E}\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^2\ :\ (y-x)\cdot\nu_E(y)>0\}} G_\varepsilon(x-y)(y-x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y$$
$$= P(E)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} G(x)|x|\,\mathrm{d}x = P(E)$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (1)

- On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tE)\right] = \overbrace{P(E) - \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right]}^{\geq P(E)(1-\gamma+o(1))>0}$$

où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P_{G_\varepsilon}(tE)\right] = \frac{2}{t}\,\overbrace{P_{G_\varepsilon}(tE)}^{\leq tP(E)}$$

$$- \underbrace{\int_E\int_{\partial E} G_{(t^{-1}\varepsilon)}(x-y)(y-x)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y\,\mathrm{d}x}_{=:\,\frac{1}{t}R_\varepsilon(tE)}$$

- Si E **convexe fixé** à bord C^2

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon(E) &= \int_{\partial E}\int_E G_\varepsilon(x-y)\underbrace{(y-x)\cdot\nu_E(y)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x\,d\mathscr{H}^1_y \\
&\simeq \int_{\partial E}\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^2\ :\ (y-x)\cdot\nu_E(y)>0\}} G_\varepsilon(x-y)(y-x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\nu_E(y)\,d\mathscr{H}^1_y \\
&= P(E)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} G(x)|x|\,\mathrm{d}x = P(E)
\end{aligned}$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (2)

- Si F est **convexe** et $\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq F \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)}$, on a
$$P(F) \geq R_\varepsilon(F) \geq P(F) - O(\delta(\varepsilon)),$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (2)

- Si F est **convexe** et $\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq F \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)}$, on a
$$P(F) \geq R_\varepsilon(F) \geq P(F) - O(\delta(\varepsilon)),$$
donc pour $t = 1 + O(\delta(\varepsilon))$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tF)\right] \geq P(F) - \gamma\big(1 + o(1)\big)P(F) > 0$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (2)

- Si F est **convexe** et $\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq F \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)}$, on a
$$P(F) \geq R_\varepsilon(F) \geq P(F) - O(\delta(\varepsilon)),$$
donc pour $t = 1 + O(\delta(\varepsilon))$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tF)\right] \geq P(F) - \gamma(1+o(1))P(F) > 0$$

- Ici $F := \mathrm{co}(E)$, et $t < 1$ t.q. $|t\mathrm{co}(E)| = |B_1|$
$$\implies \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(t\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E)$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (2)

- Si F est **convexe** et $\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq F \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)}$, on a

$$P(F) \geq R_\varepsilon(F) \geq P(F) - O(\delta(\varepsilon)),$$

  donc pour $t = 1 + O(\delta(\varepsilon))$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tF)\right] \geq P(F) - \gamma(1 + o(1))P(F) > 0$$

- Ici $F := \mathrm{co}(E)$, et $t < 1$ t.q. $|t\mathrm{co}(E)| = |B_1|$

$$\implies \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(t\mathrm{co}(E)) < \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) \quad \text{si} \quad |E| < |\mathrm{co}(E)|$$

Diminution par redimensionnement d'un convexe (2)

- Si F est **convexe** et $\overline{B}_{1-\delta(\varepsilon)} \subseteq F \subseteq B_{1+\delta(\varepsilon)}$, on a

$$P(F) \geq R_\varepsilon(F) \geq P(F) - O(\delta(\varepsilon)),$$

  donc pour $t = 1 + O(\delta(\varepsilon))$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(tF)\right] \geq P(F) - \gamma(1 + o(1))P(F) > 0$$

- Ici $F := \mathrm{co}(E)$, et $t < 1$ t.q. $|t\mathrm{co}(E)| = |B_1|$

$$\implies \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(t\mathrm{co}(E)) < \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(\mathrm{co}(E)) \leq \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E) \quad \text{si} \quad |E| < |\mathrm{co}(E)|$$

$\implies$ E **convexe**

Les minimiseurs sont quasi-sphériques

- ∂E est un graphe au-dessus de la sphère

$$\partial E = \Big\{(1 + u_\varepsilon(x))x \ : \ x \in \mathbb{S}^{n-1}\Big\},$$

où $\|u_\varepsilon\|_{C^0} \leq 2\delta(\varepsilon)$.

[7] Fuglede 1989

Les minimiseurs sont quasi-sphériques

- ∂E est un graphe au-dessus de la sphère

$$\partial E = \left\{(1+u_\varepsilon(x))x \ : \ x \in \mathbb{S}^{n-1}\right\},$$

où $\|u_\varepsilon\|_{C^0} \leq 2\delta(\varepsilon)$.

- Par convexité de E, on a[6]

$$\|\nabla_\tau u_\varepsilon\|_{C^0} \leq 2\left(\frac{1+\|u_\varepsilon\|_{C^0}}{1-\|u_\varepsilon\|_{C^0}}\right)\|u_\varepsilon\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} = O\left(\delta(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right),$$

donc $\|u_\varepsilon\|_{C^1} = o(1)$.

[7] Fuglede 1989

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (1)

- $\partial E_\varepsilon = \left\{(1 + t_\varepsilon u_\varepsilon(x))x \ : \ x \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}$, $\|u_\varepsilon\|_{C^1} \leq \frac{1}{2}$, $0 < t_\varepsilon < o(1)$

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (1)

- $\partial E_\varepsilon = \left\{(1+t_\varepsilon u_\varepsilon(x))x \;:\; x \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}$, $\|u_\varepsilon\|_{C^1} \leq \frac{1}{2}$, $0 < t_\varepsilon < o(1)$

$$
\begin{aligned}
&P_{G_\varepsilon}(E_\varepsilon) \\
&\quad = \iint\limits_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} d\mathscr{H}^{n-1}_x \, d\mathscr{H}^{n-1}_y \int_0^{1+tu(x)} \mathrm{d}r \int_{1+tu(y)}^{\infty} \mathrm{d}\rho \, G_\varepsilon(rx-\rho y) r^{n-1} \rho^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (1)

- $\partial E_\varepsilon = \left\{(1+t_\varepsilon u_\varepsilon(x))x \,:\, x \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}$, $\|u_\varepsilon\|_{C^1} \le \frac{1}{2}$, $0 < t_\varepsilon < o(1)$

$$P_{G_\varepsilon}(E_\varepsilon) = \iint_{\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}} d\mathscr{H}^{n-1}_x \, d\mathscr{H}^{n-1}_y \int_0^{1+tu(x)} \mathrm{d}r \int_{1+tu(y)}^{\infty} \mathrm{d}\rho \, G_\varepsilon(rx-\rho y) r^{n-1}\rho^{n-1}.$$

- $\implies$ si $t < t_*(n,G)$,

$$\begin{aligned} &P_{G_\varepsilon}(E_\varepsilon) - P_{G_\varepsilon}(B_1) \\ &\quad \le \frac{t^2}{2}\Big((1+o(1))\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} - ((n-1)-o(1))\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\Big) \\ &\qquad + Ct^3\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right). \end{aligned}$$

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (2)

- Également

$$
\begin{aligned}
&P(E_\varepsilon) - P(B_1) \\
&\qquad \geq \frac{t^2}{2}\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} - (n-1)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right) \\
&\qquad\qquad - Ct^3\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right),
\end{aligned}
$$

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (2)

- Également

$$\begin{aligned} P(E_\varepsilon) - P(B_1) \\ &\geq \frac{t^2}{2}\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} - (n-1)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right) \\ &\qquad - Ct^3\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right), \end{aligned}$$

- Avec l'estimée sur $P_{G_\varepsilon}(E_\varepsilon)$, on obtient

$$\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_\varepsilon) - \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1) \geq \frac{t^2}{16}(1-\gamma)\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right)$$

Minimalité de B_1 parmi les ensembles quasi-sphériques (2)

- Également

$$
\begin{aligned}
&P(E_\varepsilon) - P(B_1)\\
&\qquad \geq \frac{t^2}{2}\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} - (n-1)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right)\\
&\qquad\qquad - Ct^3\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right),
\end{aligned}
$$

- Avec l'estimée sur $P_{G_\varepsilon}(E_\varepsilon)$, on obtient

$$
\mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(E_\varepsilon) - \mathcal{F}_{\gamma,\varepsilon}(B_1) \geq \frac{t^2}{16}(1-\gamma)\left(\|\nabla_\tau u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right)
$$

$\implies t_\varepsilon = 0,$ c-à-d **B_1 unique minimiseur.**