

Problèmes inverses et intégrale d'Abel, régularisation par pénalisation de la dérivée

Cécile Della Valle, Camille Pouchol

MAP5, CNRS UMR 8145, Paris.

June 23, 2021

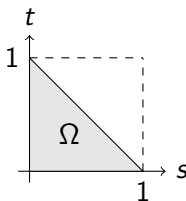


Université
de Paris



Intégrales d'Abel

$$a \in \mathbb{R}, \quad x \in L^2(0, 1), \quad T_a x(t) = \int_0^t (t-s)^{a-1} k(t, s) x(s) ds.$$



$$\Omega = \{0 \leq s \leq t \leq 1\}$$

$$T_a x = y, \quad \|y^\delta - y\| \leq \delta,$$

$$x \in H^q(0, 1), \quad \|x\|_{H^q} \leq M.$$

Intégrales d'Abel, problème inverse

$$T_1 x(t) = \int_0^t x(s) ds ,$$

$$T_1 x = S_1 x = y ,$$

$$y^\delta \in L^2(0,1), \quad \delta \sim 0$$

Ici, il faut donner un sens à la dérivée de y^δ pour inverser T_1 .
Plus généralement, l'opérateur T_a est compact, l'inverse n'est pas continu.

Stratégie de régularisation

Soit L un opérateur de x de dérivation d'ordre p , on s'intéresse à la régularisation de type Tikhonov,

$$x^{\delta,\alpha} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|T_a x - y^\delta\|^2 + \alpha \|Lx\|^2.$$

On choisit le paramètre $\alpha = \alpha(\delta)$ tel que l'erreur de reconstruction est minimale

$$\|x^{\delta,\alpha} - x\| \leq f(\delta).$$

Stratégie de régularisation

$$x^{\delta,\alpha} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|T_a x - y^\delta\|^2 + \alpha \|Lx\|^2.$$

Enjeu : Trouver un opérateur D qui caractérise une échelle de Hilbert $(X_p)_{p \in \mathbb{R}}$ tel que $L = D^p$. Plus p est grand, plus l'a priori de régularité est grand.

De plus T_a est un opérateur d'ordre a dans $(X_p)_{p \in \mathbb{R}}$, i.e.,

$$\|T_a x\|^2 \sim \|x\|_{p=-a}^2.$$

État de l'art

Gorenflo et al. et Ang et al. ont réalisé ce travail pour $a \leq 1$ et $p < 1$.

Mais,

- l'échelle $(X_p)_{p \in \mathbb{R}}$ ne convient plus pour $a \geq 1$,
- pour $a < 1$ et $p > 1$ il n'est démontré qu'une inclusion,
- l'implémentation numérique n'est pas réalisée.

- 1 Introduction
- 2 Construction des échelles de Hilbert
- 3 Projection de l'opérateur
- 4 Numérique

Construction

Soit $r \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur auto-adjoint

$$\begin{cases} B_r = (-\Delta)^r \\ \mathcal{D}(B_r) = \{x \in H^{2r}, + C.L.\} . \end{cases} \quad (1)$$

Definition : Echelle de Hilbert

Pour $r \in \mathbb{N}^*$,

$$D_r = B_r^{1/2r} ,$$

on définit l'échelle de Hilbert $(X_{r,p})_{p \in \mathbb{R}}$ induite par $(D_r, \mathcal{D}(D_r))$, associé à la norme

$$\|D_r^p x\| =: \|x\|_{r,p} .$$

Lien avec l'opérateur

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, $k = 1$, on définit

$$S_r x = \int_0^t (t-s)^{r-1} x(s) ds .$$

Lemme

$$S_r^* S_r = (r-1)!^2 (B_r)^{-1} .$$

$$\|S_r x\| \sim \|B_r^{-1/2} x\| = \|x\|_{r,p=-r} .$$

Caractérisation

Pour $r = 2$,

$$\begin{aligned} X_{r=2,p=4} &= \mathcal{D}(B_2) \\ &= \{x \in H^4, x(1) = 0, x'(1) = 0, x''(0) = 0, x'''(0) = 0\} \end{aligned}$$

Comment définir $X_{2,p}$ pour $p \neq 4$?

On peut facilement connaître $X_{r=2,p=4m} = \mathcal{D}(B_2^m)$.

On va devoir interpoler entre ces espaces.

Caractérisation

Proposition

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 0$, on définit

$$\tilde{X}_{r,p} := \{x \in H^p, \text{ + Conditions aux limites } \} ,$$

avec la norme

$$\| \cdot \|_{\tilde{X}_{r,p}} = | \cdot |_{H^p} .$$

Pour tout $p \geq 0$, et $p \notin \mathbb{N} + 1/2$,

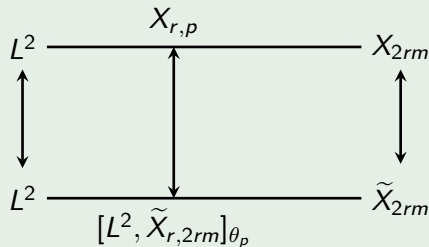
$$\tilde{X}_{r,p} = X_{r,p} .$$

Caractérisation : preuve

preuve

Étape 1 La proposition est vraie pour les multiples de $p = 2rm$.

Étape 2 On utilise des résultats d'interpolation d'espaces de Hilbert avec conditions aux limites de Guidetti, 1991.



Première approche

On note pour $a \in \mathbb{R}$, $k = 1$,

$$S_a x(t) = \int_0^t (t-s)^{a-1} x(s) ds .$$

On factorise T_a par S_a à droite,

$$\forall x \in L^2, \quad T_a x(t) = k(t, t)(I - R_a)S_a x(t) ,$$

et R_a est un opérateur à noyau.

Première approche

Théorème

Pour $a > 0$,

- $c_k^{-1} \leq |k(t, t)| \leq c_k$ for $c_k > 0$,
- $I - R_a$ est borné, inversible d'inverse borné,

alors T_a est injective et pour $r \geq a$,

$$\forall x \in L^2, \quad c^{-1} \|x\|_{r, -a} \leq \|T_a x\|_{L^2} \leq c \|x\|_{r, -a}.$$

Première approche

preuve

Étape 1: Pour $k = 1$,

$$S_1 = S, \quad S_a \sim S^a.$$

S est un opérateur m -accretif, pour $\theta < 1$,

$$\|S_r x\| \sim \|D_r^{-r} x\| \implies \|S_a x\| \sim \|D_r^{-a} x\| = \|x\|_{r,p=-a}.$$

Étape 2:

$$\|(I - R_a)^{-1}\|^{-1} \|S_a x\| \leq \|T_a x\| \leq \|I - R_a\| \|S_a x\|.$$

Seconde approche

On rappelle pour $a \in \mathbb{R}$,

$$S_a x(t) = \int_0^t (t-s)^{a-1} x(s) ds .$$

On décompose en un terme d'ordre a et un terme d'ordre $a + \gamma$,
 $\forall x \in L^2$,

$$\begin{aligned} T_a x(t) &= k(t, t) \int_0^t (t-s)^{a-1} x(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{a-1} (k(t, s) - k(t, t)) x(s) ds \\ &= k(t, t) S_a + R_{a, \gamma} S_{a+\gamma} . \end{aligned}$$

Seconde approche

Théorème

Pour $a > 0$, $a \notin \mathbb{N}$. Si T_a est injective, et $R_{a,\gamma}$ satisfait

$$\|R_{a,\gamma}\| < +\infty ,$$

alors

$$\forall x \in L^2, \quad c^{-1} \|x\|_{r,-a} \leq \|T_a x\|_{L^2} \leq c \|x\|_{r,-a} .$$

Seconde approche

preuve

On utilise le Lemme de Peetre.

Pour X et Y deux espaces de Banach, T borné injectif de Y dans X , et R compact de Y dans X . alors

$$\forall x \in Y, \quad \|x\|_Y \leq C (\|Tx\|_X + \|Rx\|_X) .$$

entraîne

$$\forall x \in Y, \quad \|x\|_Y \leq C \|Tx\|_X .$$

Théorème de Natterer

Corollaire

Pour $x \in X_{r,q} \subset H^q(0,1)$,

$$p \geq \frac{q-a}{2},$$

alors la solution

$$x^{\delta,\alpha(\delta),p} = \operatorname{argmin}_x \|T_a x - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|_p^2,$$

satisfait

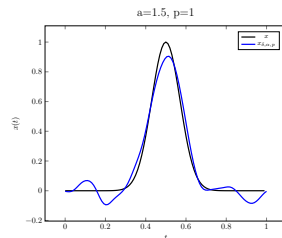
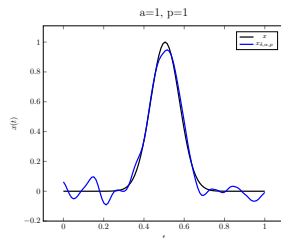
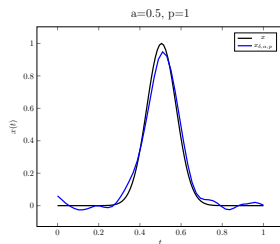
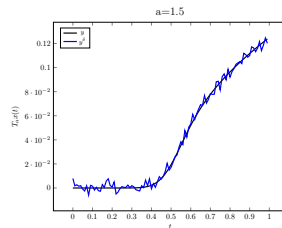
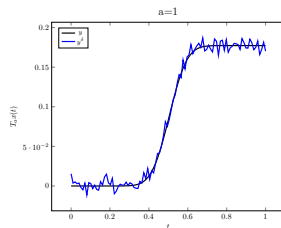
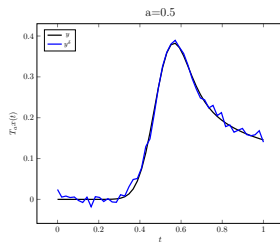
$$\|x^{\delta,\alpha(\delta),p} - x\| \leq c \delta^{\frac{q}{q+a}}.$$

Discrétisation

$$x^{\delta,\alpha,p} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\| T_a x - y^\delta \right\|^2 + \alpha \|x\|_p^2 ,$$

- Discrétisation de T_a : méthode des trapèzes ;
- Discrétisation de D : pour a fixé et $a \leq r$, on calcule B_r par différences finies avec les CL.
- Minimisation : méthode de gradient conjugué.

Taux de convergence

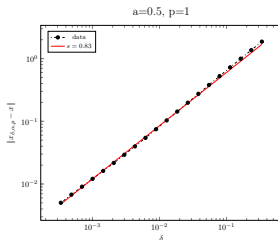


Taux de convergence

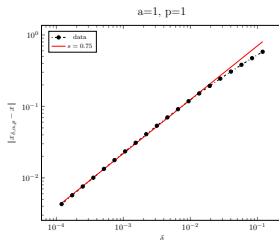
- a priori $x \in H^q$,
- régularisation $+|D_r^p x|$,

alors

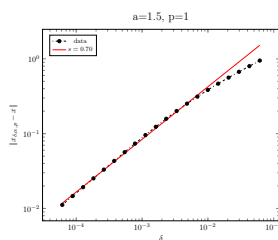
$$p \geq \frac{q-a}{2} \implies \text{pente} = q/(q+a).$$



$a = 0.5$, pente= 0.83

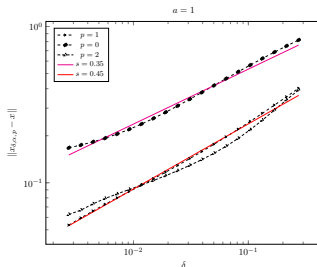
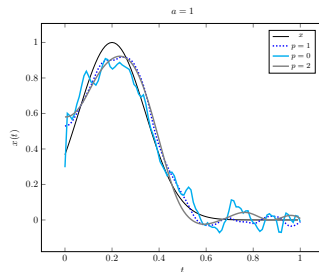
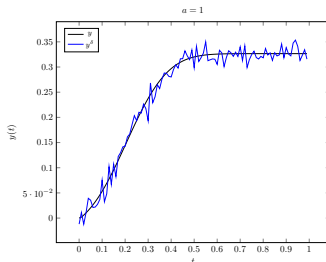


$a = 1$, pente= 0.75



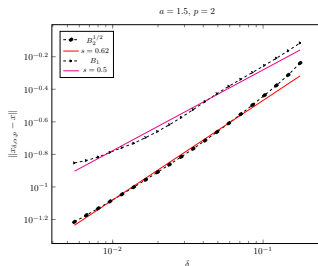
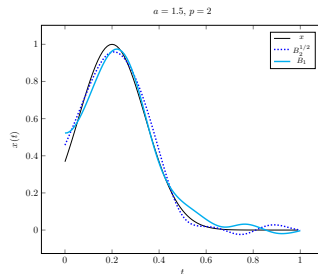
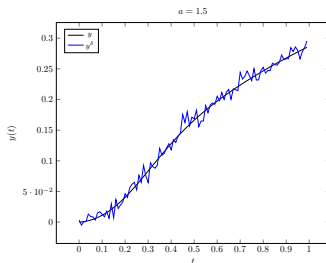
$a = 1.5$, pente= 0.70

Effet de saturation



Pour $a = 1$, lorsque la fonction x appartient à $X_{r=1,q=3/2}$, la pente de convergence sature pour $p \geq 1$.

Matrice de dérivation



Pour $a = 3/2$, lorsque la fonction x appartient à $X_{r=1,q=3/2}$, la reconstruction est meilleure pour la matrice de dérivation B_2 que B_1 .

Numérique : conclusion

Trois résultats numériques :

- le taux de convergence de l'erreur en fonction du bruit ;
- effet de saturation, inutile de dériver au-delà d'un certain ordre p ;
- le choix de la matrice de derivation est importante.

References I



Ang, Dang Dinh, Dang D. Hai, and Rudolf Gorenflo (1992).
“Regularization of a generalized Abel integral equation”. In:
[Applicable Analysis](#) 45.1-4, pp. 321–332.



Gorenflo, Rudolf and Masahiro Yamamoto (1999). “Operator
theoretic treatment of linear Abel integral equations of first
kind”. In: [Japan journal of industrial and applied mathematics](#)
16.1, pp. 137–161.



Guidetti, Davide (1991). “On interpolation with boundary
conditions”. In: [Mathematische Zeitschrift](#) 207.1, pp. 439–460.



Natterer, Frank (1984). “Error bounds for Tikhonov regularization
in Hilbert scales”. In: [Applicable Analysis](#) 18.1-2, pp. 29–37.

References II



Peetre, Jaak (Nov. 1961). "Another approach to elliptic boundary problems". In:
Communications on Pure and Applied Mathematics 14.4,
pp. 711–731. URL:
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160140404>.

Merci pour votre attention.