

EQUATIONS DE MAXWELL
EN PRÉSENCE D'UNE POINTE CONIQUE
DE MATÉRIAU NÉGATIF

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Lucas Chesnel et Mahran Rihani

POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA) et DEFI (INRIA), IP Paris



Montpellier, SMAI, juin 2021

OBJECTIF ET MOTIVATION

Résoudre les équations de Maxwell harmoniques en présence d'une inclusion

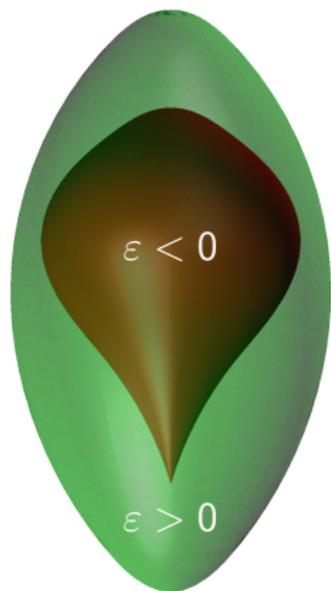
- où la permittivité diélectrique est négative,
- avec une pointe conique.

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J}$$

DIFFICULTÉS

Les résultats classiques ne s'appliquent pas, l'effet de pointe est amplifié.

Motivation : plasmonique
(nanoparticules d'or à coins)

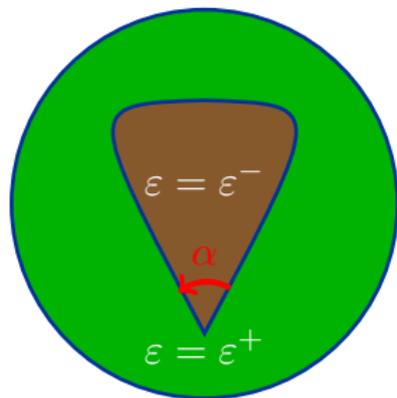


AU PROGRAMME...

- ① LE CAS 2D SCALAIRE - RAPPELS
- ② LE CAS 3D SCALAIRE
- ③ LE CAS 3D VECTORIEL
- ④ CONCLUSION ET PERSPECTIVES

RAPPELS DES RÉSULTATS EN 2D SCALAIRE

$u \in H_0^1(\Omega)$ tel que
 $-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) = f$
où $f \in L^2(\Omega)$



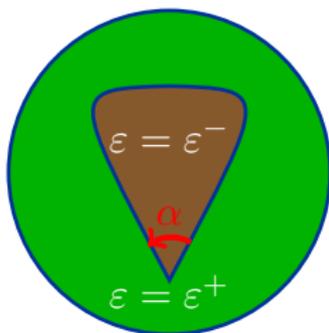
$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^+ > 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \varepsilon^- < 0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} < 0$$

Les propriétés du problème dépendent de l'angle α et du contraste κ .

RAPPELS DES RÉSULTATS EN 2D SCALAIRE

$u \in H_0^1(\Omega)$ tel que
 $-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) = f$
où $f \in L^2(\Omega)$



$$\kappa = \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^-} < 0$$

- Si $\kappa \notin I_c(\alpha) = \left[\frac{\alpha-2\pi}{\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi} \right]$ (pour $\alpha = \pi/2$, $I_c(\alpha) = [-3, -1/3]$)
le problème est bien posé (opérateur Fredholm d'indice 0).

Outil : T-coercivité.

On construit un isomorphisme $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ tel que
 $a(u, Tv) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla(Tv)$ est "coercive+compacte".

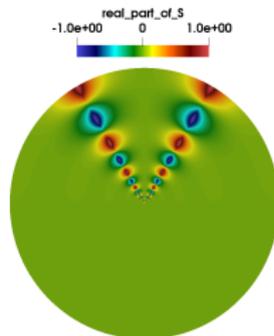
- Si $\kappa \in I_c(\alpha)$ le problème n'est pas Fredholm !

RAPPELS DES RÉSULTATS EN 2D SCALAIRE (SUITE)

Si $\kappa \in]\frac{\alpha-2\pi}{\alpha}, -1[\cup]-1, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}[$ il existe des **singularités propagatives** :

$$\left| \begin{array}{l} s^\pm(r, \theta) = r^{\pm i\eta} \varphi(\theta) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla s^\pm) = 0 \end{array} \right.$$

$s^\pm \in L^2$ mais $s^\pm \notin H^1$.



L'énergie s'accumule au coin.

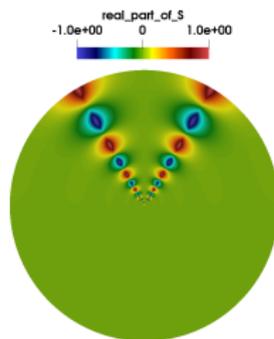
Le coin joue le rôle de l'infini dans les problèmes de scattering : il faut sélectionner l'onde sortante. On parle d'une **onde de trou noir**.

RAPPELS DES RÉSULTATS EN 2D SCALAIRE (SUITE)

Si $\kappa \in]\frac{\alpha-2\pi}{\alpha}, -1[\cup]-1, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}[$ il existe des singularités propagatives :

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{s}^\pm(r, \theta) = r^{\pm i\eta} \varphi(\theta) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0 \\ \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \mathfrak{s}^\pm) = 0 \end{array} \right.$$

$\mathfrak{s}^\pm \in L^2$ mais $\mathfrak{s}^\pm \notin H^1$.



Il faut introduire un **nouveau cadre fonctionnel** : le problème est bien posé (Fredholm) dans

$$V^+ = \tilde{V} \oplus \operatorname{Vect}\{\mathfrak{s}^+\} \quad \mathfrak{s}^+ = \chi \mathfrak{s}^+$$

où \mathfrak{s}^+ se propage "vers" le coin, χ est une fonction de troncature qui vaut 1 proche du coin et $\tilde{V} \subset H_0^1(\Omega)$ est un **espace à poids** (Kondratiev).

2013 : Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Claeys

RAPPELS DES RÉSULTATS EN 2D SCALAIRE (FIN)

Le problème est bien posé (Fredholm) dans $V^+ = \tilde{V} \oplus \text{Vect}\{s^+\}$, où

$$\tilde{V} \subset H_0^1(\Omega) \text{ mais } V^+ \not\subset H_0^1(\Omega), \text{ car } s^+ \in L^2(\Omega) \text{ mais } \nabla s^+ \notin \mathbf{L}^2(\Omega).$$

L'espace \tilde{V} contient des fonctions **moins singulières** que s^\pm de sorte que

$$\forall \tilde{u} \in \tilde{V}, \quad \nabla \tilde{u} \cdot \nabla s^\pm \in L^1(\Omega).$$

Cela permet de donner un sens à la formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in V^+ \text{ tel que } \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \bar{v} = \int_{\Omega} f \bar{v}, \quad \forall v \in V^+$$

où l'on a posé pour $u = \tilde{u} + c_u s^+, v = \tilde{v} + c_v s^+ \in V^+$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \bar{v} &:= \int_{\Omega} \varepsilon \left[\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} + c_u \nabla s^+ \cdot \nabla \tilde{v} + \bar{c}_v \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \bar{s}^+ \right] \\ &\quad - c_u \bar{c}_v \int_{\Omega} \text{div}(\varepsilon \nabla s^+) \bar{s}^+ \quad \text{terme non hermitien !} \end{aligned}$$

ET EN 3D SCALAIRE ? (SINGULARITÉ CONIQUE)

Les **singularités propagatives** sont de la forme

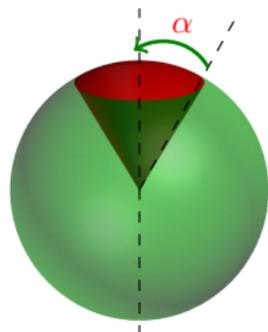
$$s^{\pm}(r, \theta, \psi) = r^{\pm i\eta - \frac{1}{2}} \varphi(\theta, \psi) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0$$

($\rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 0$)

Elles existent ssi $\kappa \in]-1, -a_{\alpha}[$ (**mais pas sous -1!**)

avec $a_{\alpha} = \frac{{}_2F_1(1/2, 1/2, 1, \cos^2(\alpha/2)) {}_2F_1(3/2, 3/2, 2, \sin^2(\alpha/2))}{{}_2F_1(1/2, 1/2, 1, \sin^2(\alpha/2)) {}_2F_1(3/2, 3/2, 2, \cos^2(\alpha/2))}$

où ${}_2F_1$ désigne la **fonction Gaussienne hypergéométrique**.



ET EN 3D SCALAIRE ? (SINGULARITÉ CONIQUE)

Les **singularités propagatives** sont de la forme

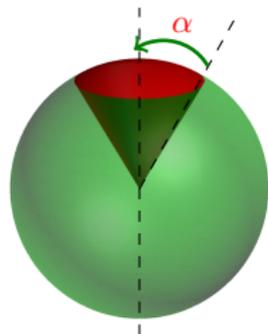
$$s^\pm(r, \theta, \psi) = r^{\pm i\eta - \frac{1}{2}} \varphi(\theta, \psi) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0$$

Elles existent ssi $\kappa \in]-1, -\alpha_\alpha[$ (**mais pas sous -1 !**)

En 2D, il existait une seule singularité s^\pm , en 3D il en existe $N \geq 1$:

$$s_1^\pm = \chi s_1^\pm, s_2^\pm = \chi s_2^\pm \cdots s_N^\pm = \chi s_N^\pm$$

avec $N = N(\kappa, \alpha) \rightarrow \infty$ si $\kappa \rightarrow -1$ ou $\alpha \rightarrow 0$.

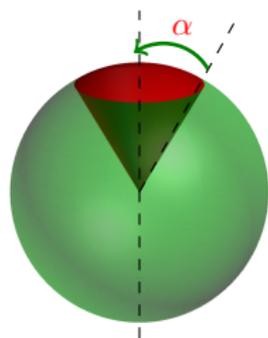


ET EN 3D SCALAIRE ? (SINGULARITÉ CONIQUE)

Les singularités propagatives sont de la forme

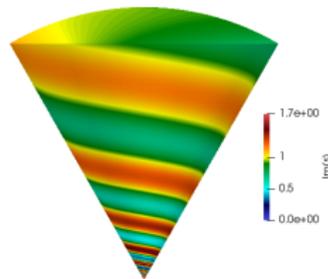
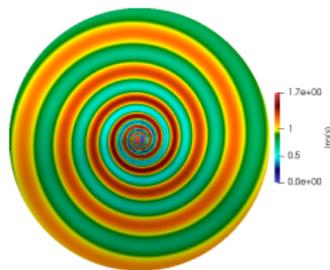
$$s^\pm(r, \theta, \psi) = r^{\pm i\eta - \frac{1}{2}} \varphi(\theta, \psi) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0$$

Elles existent ssi $\kappa \in]-1, -a_\alpha[$ (mais pas sous -1 !)



En 2D, il existait une seule singularité s^\pm , en 3D il en existe $N \geq 1$:

$$s_1^\pm, s_2^\pm \cdots s_N^\pm$$

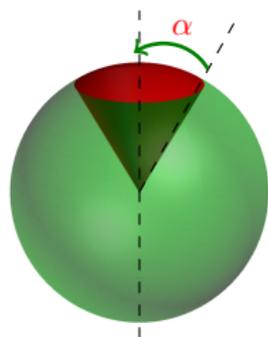


ET EN 3D SCALAIRE ? (SINGULARITÉ CONIQUE)

Les **singularités propagatives** sont de la forme

$$s^\pm(r, \theta, \psi) = r^{\pm i\eta - \frac{1}{2}} \varphi(\theta, \psi) \quad \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0$$

Elles existent ssi $\kappa \in]-1, -a_\alpha[$ (**mais pas sous -1 !**)



En 2D, il existait une seule singularité s^\pm , en 3D il en existe $N \geq 1$:

$$s_1^\pm, s_2^\pm \cdots s_N^\pm$$

Le problème

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } -\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) = f$$

est bien posé dans

- $V = H_0^1(\Omega)$ si $\kappa \notin [-1, -a_\alpha]$,
- $V = \tilde{V} \oplus \operatorname{Vect}\{s_1^+, s_2^+ \cdots s_N^+\}$, si $\kappa \in]-1, -a_\alpha[$.

LE CAS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL (3D)

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{rot\ rot\ E} - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J} \quad (\Omega) \\ \mathbf{E} \times \nu = 0 \quad (\partial\Omega) \quad (\operatorname{div} \mathbf{J} = 0) \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot\ E} \cdot \mathbf{rot\ F} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{F} \, dx. \end{array} \right.$$



Il faut choisir X pour :

- Assurer l'équivalence.
- Avoir un problème variationnel de type Fredholm.

LE CAS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL (3D)

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{rot rot E} - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J} \quad (\Omega) \\ \mathbf{E} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \quad (\partial\Omega) \quad (\operatorname{div} \mathbf{J} = 0) \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$



La démarche classique pour $\varepsilon > 0$:

- La formulation naturelle est posée dans $\mathbf{X} = \mathbf{H}_N(\mathbf{rot})(\Omega)$.
- On montre que l'équivalence est aussi vraie pour

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_N(\varepsilon) := \{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot})(\Omega), \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \}$$

et que l'injection $\mathbf{X}_N(\varepsilon) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

EQUATIONS DE MAXWELL - CAS NON CRITIQUE

2014 : Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Ciarlet Jr

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X} \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

THÉORÈME

Si $\kappa \notin [-1, -a_\alpha]$ et si le problème scalaire a une solution unique :

- 1 Les problèmes dans $\mathbf{X}_N(\varepsilon)$ est **équivalent** au problème de départ.
- 2 L'injection $\mathbf{X}_N(\varepsilon) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ est **compacte**.

Donc le problème de Maxwell est **Fredholm**.

Idée principale de la preuve de l'équivalence :

$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_N(\operatorname{rot})(\Omega)$, il existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{F})$
donc $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \nabla \varphi \in \mathbf{X}_N(\varepsilon)$.

EQUATIONS DE MAXWELL - CAS CRITIQUE

Dans le cas critique ($\kappa \in]-1, -a_\alpha[$), la preuve précédente ne marche plus. Il faut changer de cadre fonctionnel.

UN NOUVEL ESPACE POUR LE CHAMP ÉLECTRIQUE

$$\mathbf{X}_N^+(\varepsilon) = \{ \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + c_1 \nabla s_1^+ + \cdots + c_N \nabla s_N^+, c_j \in \mathbb{C}, \tilde{\mathbf{E}} \in \tilde{\mathbf{V}}, \text{rot } \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{E} \times \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

où $\tilde{\mathbf{V}} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ est tel que $\forall \tilde{\mathbf{E}} \in \tilde{\mathbf{V}}, \forall j = 1, \dots, N, \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla s_j^\pm \in L^1(\Omega)$.

On remarque que $\mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \not\subset \mathbf{L}^2(\Omega)$! La solution n'est pas d'énergie finie.

RÉSULTAT IMPORTANT

$[\int_\Omega |\text{rot } \mathbf{E}|^2]^{1/2}$ est une norme sur $\mathbf{X}_N^+(\varepsilon)$

EQUATIONS DE MAXWELL - CAS CRITIQUE

Dans le cas critique ($\kappa \in]-1, -a_\alpha[$), la preuve précédente ne marche plus. Il faut changer de cadre fonctionnel.

UN NOUVEL ESPACE POUR LE CHAMP ÉLECTRIQUE

$$\mathbf{X}_N^+(\varepsilon) = \{ \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + c_1 \nabla s_1^+ + \dots + c_N \nabla s_N^+, c_j \in \mathbb{C}, \tilde{\mathbf{E}} \in \tilde{\mathbf{V}}, \operatorname{rot} \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{E} \times \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

où $\tilde{\mathbf{V}} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ est tel que $\forall \tilde{\mathbf{E}} \in \tilde{\mathbf{V}}, \forall j = 1, \dots, N, \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla s_j^\pm \in L^1(\Omega)$.

LE PROBLÈME VARIATIONNEL

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

LE PROBLÈME VARIATIONNEL

Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon)$ tel que $\forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx.$$

THÉORÈME

- 1 L'équivalence avec les équations fortes est assurée.
- 2 L'injection $\mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.
- 3 Donc le problème est Fredholm.

(hal-02969739) Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Rihani

REMARQUE

On a $\mathbf{X}_N(\varepsilon) \subset \mathbf{X}_N^+(\varepsilon)$ donc le problème dans le cadre classique est aussi Fredholm, mais c'est l'équivalence qui n'est pas vraie.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ⬇ Nous justifions la sélection des s_j^+ par **absorption limite**.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ① Nous justifions la sélection des s_j^+ par **absorption limite**.
- ② Si μ change également de signe, sans être "critique", on combine les idées précédentes et la **T-coercivité** :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ① Nous justifions la sélection des s_j^+ par **absorption limite**.
- ② Si μ change également de signe, sans être "critique", on combine les idées précédentes et la **T-coercivité** :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

- ③ Nos résultats s'appliquent à un coin avec **arêtes** (coin d'un cube) sous condition sur κ .

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ① Nous justifions la sélection des s_j^+ par **absorption limite**.
- ② Si μ change également de signe, sans être "critique", on combine les idées précédentes et la **T-coercivité** :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

- ③ Nos résultats s'appliquent à un coin avec **arêtes** (coin d'un cube) sous condition sur κ .
- ④ Le cas de la **formulation en champ magnétique** est plus difficile ($\mathbf{H} \in \mathbf{L}^2$ mais $\mathbf{rot} \mathbf{H} \notin \mathbf{L}^2$), et permet la généralisation au cas où ε et μ sont critiques.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ① Nous justifions la sélection des s_j^+ par **absorption limite**.
- ② Si μ change également de signe, sans être "critique", on combine les idées précédentes et la **T-coercivité** :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \text{ tel que } \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^+(\varepsilon) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{F}} \, dx - \omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{F}} \, dx = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \overline{\mathbf{F}} \, dx. \end{array} \right.$$

- ③ Nos résultats s'appliquent à un coin avec **arêtes** (coin d'un cube) sous condition sur κ .
- ④ Le cas de la **formulation en champ magnétique** est plus difficile ($\mathbf{H} \in \mathbf{L}^2$ mais $\mathbf{rot} \mathbf{H} \notin \mathbf{L}^2$), et permet la généralisation au cas où ε et μ sont critiques.
- ⑤ Sur le plan **numérique**, si on discrétise $\tilde{\mathbf{V}}$ par éléments d'arête, la difficulté vient des termes

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x) \tilde{\mathbf{E}} \cdot \overline{\nabla s_j^+}$$

Merci pour votre attention !

