DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Schémas aux volumes finis d'ordre élevé positifs pour la diffusion sur maillage quelconque en 1D

Xavier BLANC, François HERMELINE, Emmanuel LABOURASSE, Julie PATELA (julie_patela@hotmail.fr) | 24 Juin 2021

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Problème continu

L'opérateur de diffusion apparaît dans de nombreux problèmes (conduction thermique, diffusion radiative, équations de Navier-Stokes...).

Cas de l'équation de la chaleur stationnaire

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \kappa \nabla \bar{u} = f & \text{sur} \quad \Omega, \\ \bar{u} = g & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Propriétés de ce problème :

- Il existe une unique solution et elle satisfait le principe du maximum ($i.e$ $\min(\min(f), \min(g)) \leq \bar{u} \leq \max(\max(f), \max(g))$),
- Conservativité : $\forall \omega \subset \Omega, \int_\omega f = -\int_{\partial\omega} (\kappa \nabla \bar{u}) \cdot n.$

Propriétés souhaitées pour ce schéma :

- Conservativité,
- Préserver le principe du maximum (ou au moins la positivité/monotonie ($f, g \geq 0 \Longrightarrow \bar{u} \geq 0$)).

Objectif

Discrétiser l'opérateur de diffusion de manière robuste et précise sur maillage deformé.

- Conservativité
- Positivité (et si possible le principe du maximum local)
- Ordre élevé (au moins 3)

Quelques repères bibliographiques

- Xavier Blanc, Emmanuel Labourasse, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2016 : Positivité (ordre 2).
- Bruno Després, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, EDP Sciences, 2014 : Ordre élevé, principe du maximum (maillage cartésien).
- Jean-Sylvain Camier, François Hermeline, International journal for numerical methods in engineering, 2016 : Positivité (ordre 2).
- Jérôme Droniou, Chritophe Le Potier, SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011 : Principe du maximum (ordre 2).

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\partial_x \kappa \partial_x \bar{u} = f & \text{sur} \quad \Omega, \\ \bar{u} = g & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

La première étape de construction d'un schéma aux volumes finis est d'intégrer sur une maille i. Nous avons donc

$$-\left[\kappa_{i+\frac{1}{2}} \left(\partial_x \bar{u}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \kappa_{i-\frac{1}{2}} \left(\partial_x \bar{u}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right] = h_i f_i.$$

Nous devons donc déterminer les flux

$$\bar{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \kappa_{i+\frac{1}{2}} \left(\partial_x \bar{u}\right)_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{F}}_{i-\frac{1}{2}} = \kappa_{i-\frac{1}{2}} \left(\partial_x \bar{u}\right)_{i-\frac{1}{2}}.$$

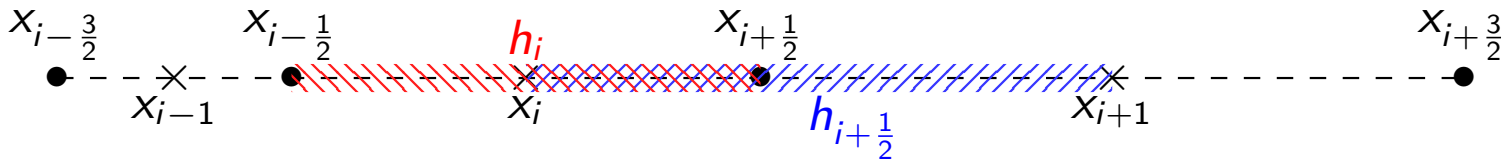


Schéma idéal

- Convergent à un ordre élevé
- Linéaire
- Conservatif
- Principe du maximum

$\Longrightarrow$ Trop de contraintes, donc nous devons négocier et nous sacrifions la linéarité

Caractéristiques principales du schéma

- Nos choix :
  - Schéma aux volumes finis,
  - Basé sur des développements de Taylor,
  - Utiliser une reconstruction polynomiale pour évaluer les dérivées.
- Pour avoir le principe du maximum ou la positivité :
  - Schéma non linéaire,
  - Utiliser un limiteur si les conditions souhaitées ne sont localement pas respectées.

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Développements de Taylor intégrés à l'ordre k au voisinage de $x_{i+\frac{1}{2}}$

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{h_{i+1}}{2}\partial_x \bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{h_{i+1}^{\ell}}{(\ell+1)!}\partial_x^{\ell}\bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}\left(h_{i+1}^{k+1}\right),$$

$$\bar{u}_{i} = \bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{h_{i}}{2}\partial_x \bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{(-1)^{\ell} h_{i}^{\ell}}{(\ell+1)!}\partial_x^{\ell}\bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}\left(h_{i}^{k+1}\right).$$

En faisant la différence entre les deux expressions et en isolant $\partial_x \bar{u}|_{i+\frac{1}{2}}$

$$\partial_x \bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i) \underbrace{- \sum_{\ell=2}^{k} \frac{h_{i+1}^{\ell} + (-1)^{\ell} h_{i}^{\ell}}{h_{i+\frac{1}{2}}(\ell+1)!}\partial_x^{\ell}\bar{u}(x_{i+\frac{1}{2}})}_{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}\left(h^{k}\right).$$

Nous avons le flux exact

$$\bar{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i) + \bar{r}_{i+\frac{1}{2}}.$$

Reconstruction polynomiale

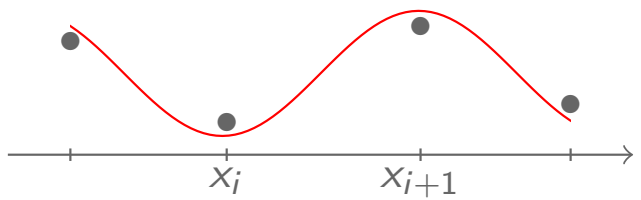
Nous avons besoin de connaître l'évaluation des dérivées de $\bar{u}$ en $x_{i+\frac{1}{2}}$. Nous avons décidé d'utiliser les mailles voisines de $x_{i+\frac{1}{2}}$ afin d'effectuer une reconstruction polynomiale de la solution.

Pour un polynôme de degré k, nous avons $k+1$ coefficients à calculer, nous avons besoin de $k+1$ mailles voisines de $x_{i+\frac{1}{2}}$. Notre polynôme sera de la forme

$$P(x) = a_k(u)x^k + ... + a_0(u).$$

Pour cela, nous calculons les coefficients du polynôme $P(x)$ tels que

$$\frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} P(x) = u_i.$$



Nous avons donc

$$\partial_x^\ell \bar{u}|_{i+\frac{1}{2}} \approx P^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

Une astuce de Y. Gao et al.[1] pour imposer la positivité discrète

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) + r_{i+\frac{1}{2}}.$$

Tout d'abord, posons

$$r^+_{i+\frac{1}{2}} = \frac{|r_{i+\frac{1}{2}}| + r_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0 \quad \text{et} \quad r^-_{i+\frac{1}{2}} = \frac{|r_{i+\frac{1}{2}}| - r_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0.$$

Donc, quelque soit le signe de $r_{i+\frac{1}{2}}$, nous aurons toujours

$$r_{i+\frac{1}{2}} = r^+_{i+\frac{1}{2}} - r^-_{i+\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons alors réécrire nos flux comme suit

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^+_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1}}\right) u_{i+1} - \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^-_{i+\frac{1}{2}}}{u_i}\right) u_i.$$

Nos coefficients sont positifs (M-Matrice) mais dépendent de u (perte de linéarité).

[1] Yanni Gao, Guangwei Yuan, Shuai Wang, Xudeng Hang, *A finite volume element scheme with a monotonicity correction for anisotropic diffusion problems on general quadrilateral meshes*, Journal of Computational Physics, 2020.

$$M(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Point fixe (non linéarité)

$\mathbf{u}0$ donné

$\nu = 0$

$\mathbf{u}^{\nu} = \mathbf{u}0$

$M(\mathbf{u}^{\nu})\mathbf{u} = \mathbf{f}$

$\mathbf{u}^{\nu+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\nu})$

Tant que $|\mathbf{u}^{\nu+1} - \mathbf{u}^{\nu}| > \epsilon$

$M(\mathbf{u}^{\nu})\mathbf{u} = \mathbf{f}$

$\mathbf{u}^{\nu+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\nu})$

$\nu = \nu + 1.$

Propriétés du schéma (non symétrique)

- Conservativité
- Positivité
- Consistance à l'ordre k
- Coercivité (sous condition)
- Convergence des flux à l'ordre k
- Convergence du schéma à l'ordre $k-1$ (grâce à la positivité)

Symétrisation

Afin de rendre ce schéma symétrique, introduisons $\beta_{i+\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^+_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1}} \right) u_{i+1} - \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^-_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}}}{u_i} \right) u_i .$$

Pour que ce schéma soit symétrique, il faut que

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i r^+_{i+\frac{1}{2}} - u_{i+1} r^-_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1} - u_i}.$$

Afin de conserver la positivité, nous devons imposer

$$\frac{\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) + r_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1} - u_i} \geq 0.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée pour certaines mailles, on limite localement à un schéma d'ordre 2 classique.

Propriétés du schéma symétrique

- Conservativité
- Symétrie
- Consistance à l'ordre k
- Coercivité (sous condition)
- Convergence des flux à l'ordre k
- Convergence du schéma à l'ordre $k-1$ (grâce à la positivité)
- Principe du maximum (M-Matrice) (donc positivité)

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Considérons le problème stationnaire suivant :

Trouver $\bar{u}$ en un point $x \in \Omega =]0, 1[$ telle que

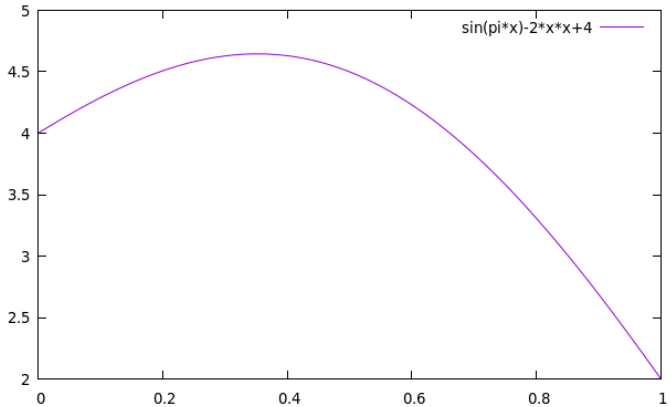
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{u}) = f & \text{sur } \Omega, \\ \bar{u} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considérons la solution analytique suivante

$$\bar{u}(x) = \sin(\pi x) - 2x^2 + 4,$$

avec

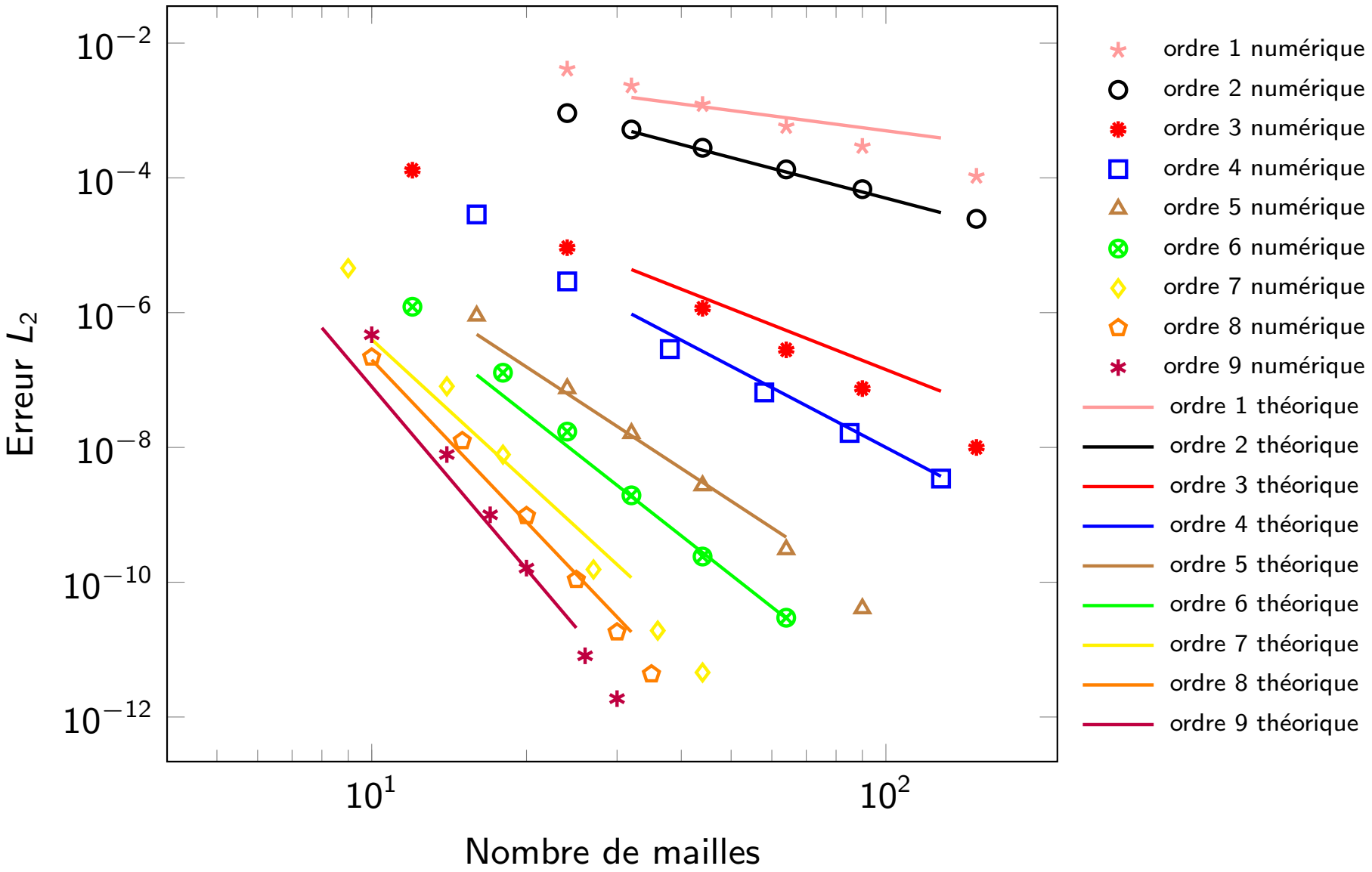
$$\kappa(x) = \exp(x).$$



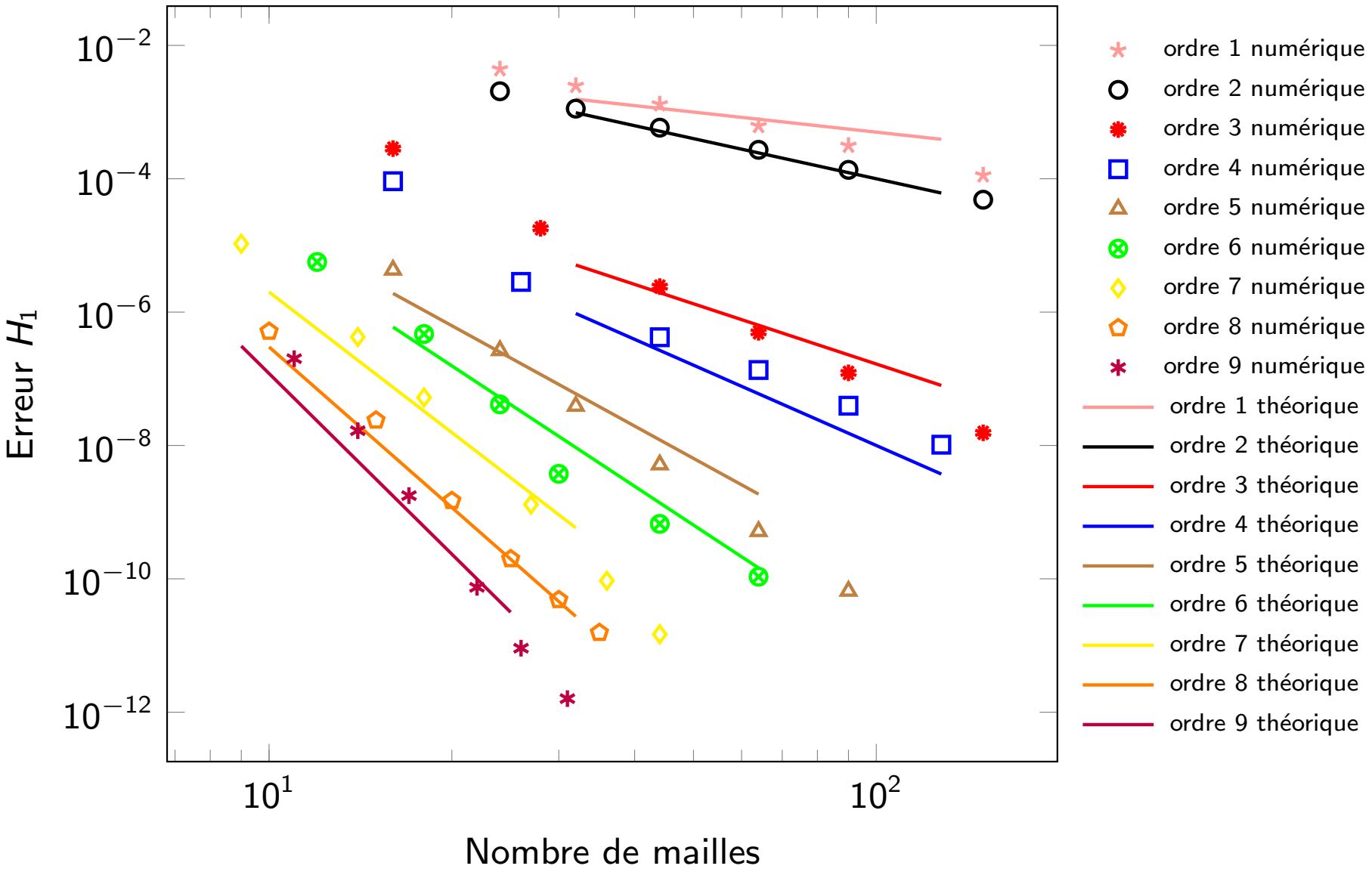
Nous avons alors

$$\begin{cases} f(x) = 4\exp(x) + 4x\exp(x) - \pi\cos(\pi x)\exp(x) + \pi^2\exp(x)\sin(\pi x) \geq 0, \\ g(0) = 4 \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 2 \geq 0. \end{cases}$$

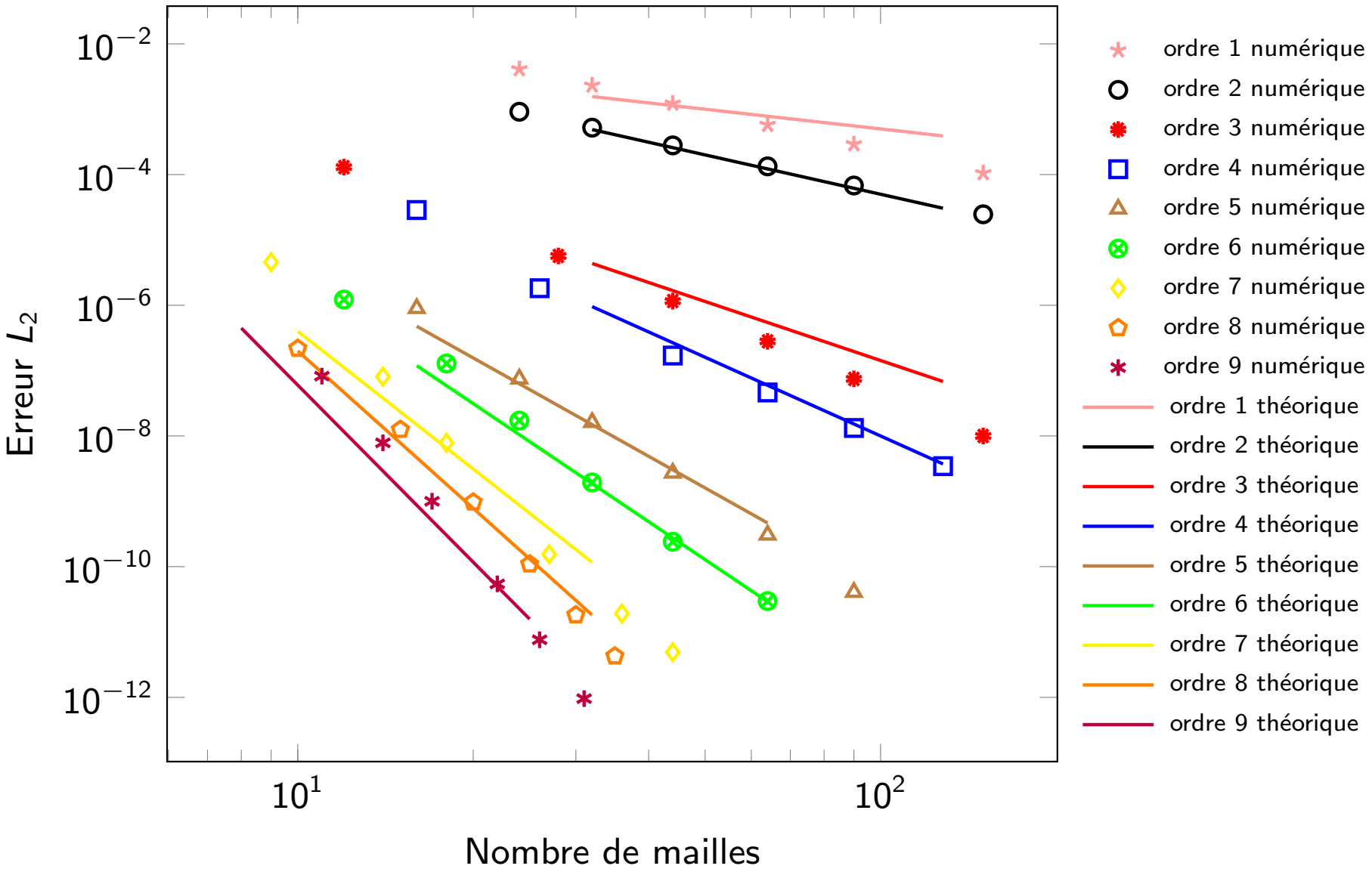
Convergence L2 du schéma non symétrique



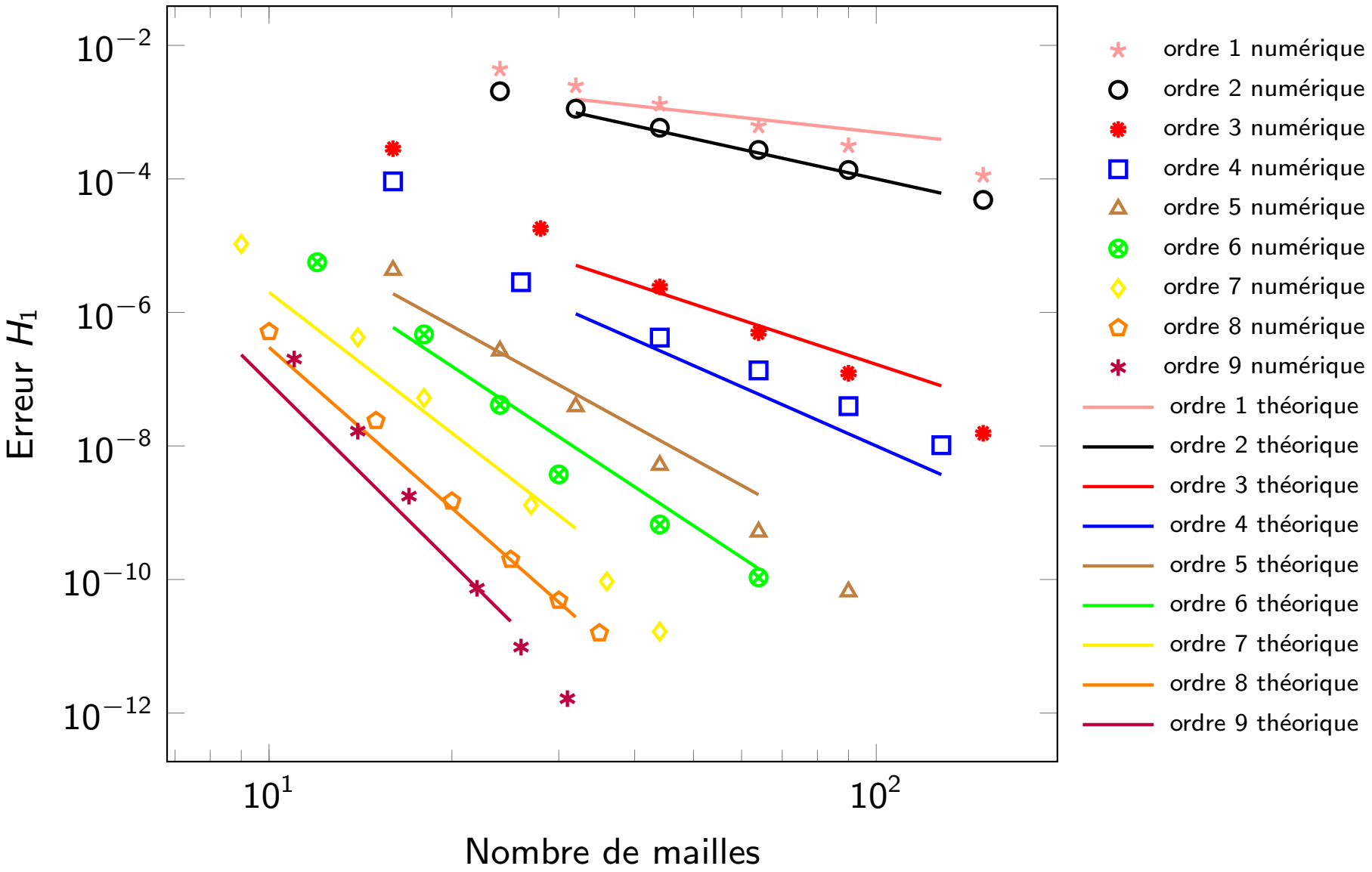
Convergence H1 du schéma non symétrique



Convergence L2 du schéma symétrique



Convergence H1 du schéma symétrique



Considérons le problème stationnaire suivant :

Trouver $\bar{u}$ en un point $x \in \Omega =]0, 1[$ telle que

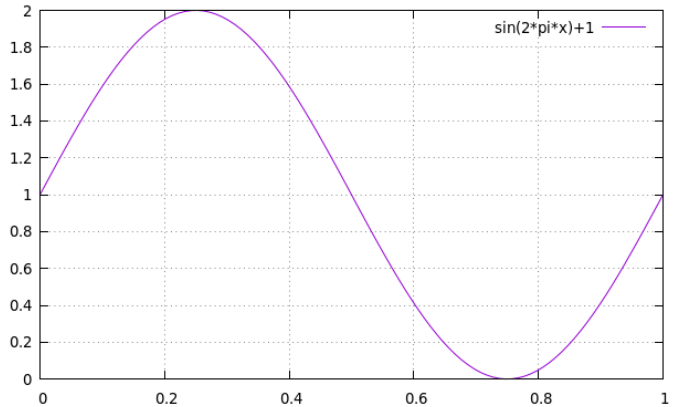
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{u}) = f & \text{sur } \Omega, \\ \bar{u} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considérons la solution analytique suivante

$$\bar{u}(x) = \sin(2\pi x) + 1,$$

avec

$$\kappa(x) = 1.$$



Nous avons alors

$$\begin{cases} f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x), \\ g(0) = 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 1 \geq 0. \end{cases}$$

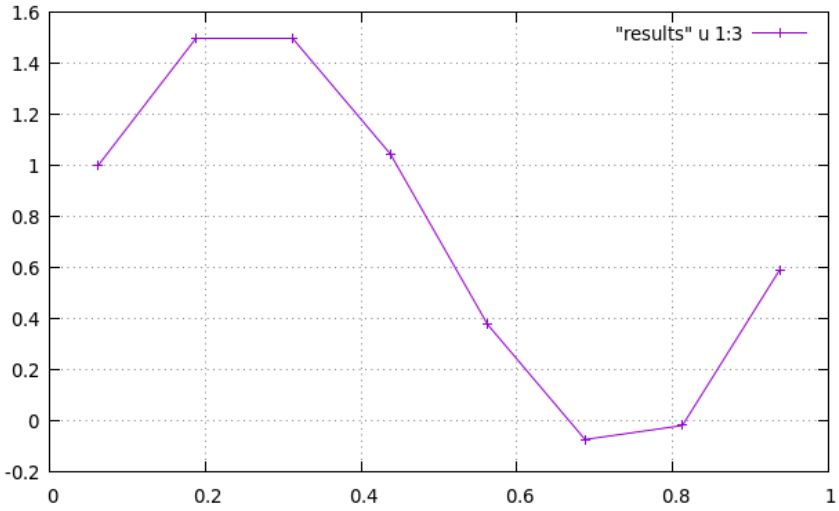


Figure: Schéma d'ordre élevé non positif

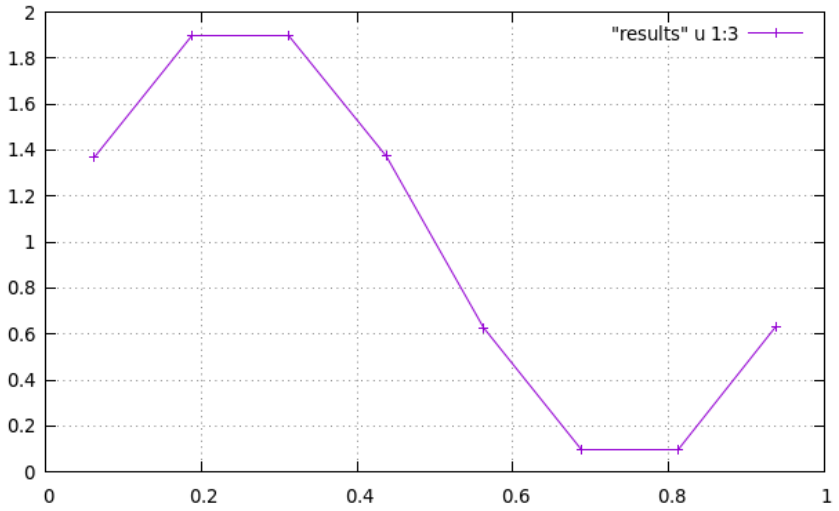


Figure: Schéma d'ordre élevé positif

Sommaire

1 Introduction

2 Problème

3 Notre méthode

4 Résultats numériques

5 Conclusion et perspectives

Conclusion :

- Schéma d'ordre élevé,
- Conservatif,
- Positivité (et principe du maximum si symétrisation),
- Convergence rapide avec peu de mailles.

Perspectives :

- Comparer nos résultats avec les résultats obtenus avec d'autres schémas,
- Extension à un coefficient de diffusion discontinu,
- Extension au 2D,
- Discrétisation en temps.