

Approximation du flot de courbure moyenne avec auto-évitement

10e Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles

Chih-Kang Huang, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1



24/06/2021

en collaboration avec

Elie Bretin (ICJ, INSA de Lyon) et

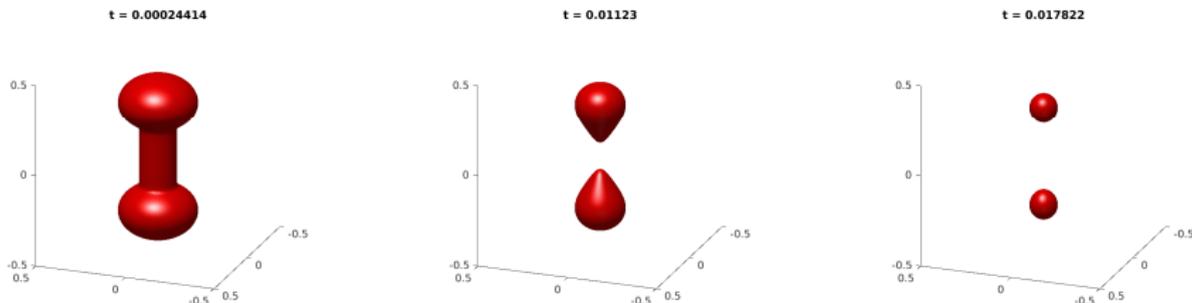
Simon Masnou (ICJ, Université Claude Bernard Lyon1)



Motivation

Contexte : Approximation par méthode champ de phase du flot de courbure moyenne de surface

Question : Peut-on éviter les changements topologiques indésirables de la surface lors de son évolution ?



Evolution d'une haltère par flot de courbure moyenne : séparation en deux composantes en temps fini.

Considérons l'énergie de Cahn-Hilliard qui est l'approximation par champ de phase du périmètre:

$$P_\varepsilon(u) := \int \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} G(u) \right) dx$$

où $G(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

Son flot gradient L^2 est l'équation d'Allen-Cahn:

$$\partial_t u = \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} G'(u)$$

Flot par courbure moyenne avec un terme de forçage

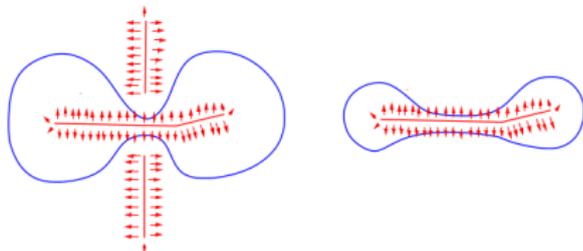
- Considérons l'équation d'Allen-Cahn equation avec un terme supplémentaire:

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \frac{G'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}(1 + f)$$

- (Qi-Zheng'18) La vitesse frontale de l'interface est:

$$V = H + \frac{\nabla f \cdot \mathbf{n}}{2(1 + f)}.$$

- Peut-on construire un f imposant une **distance δ** entre l'**interface** et son **squelette** afin d'empêcher le changement de topologie?



Prenons le champ de normales $n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$.

- $f = \det(\nabla n)$ charge-t-il les singularités en toute dimension ? (cf. L'approximation par champ de phase de l'énergie de Willmore)

Non: Bien que pour tout $n \in W^{1,N-1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{S}^{N-1})$, le jacobien **distributionnel** s'écrit comme une somme pondérée de masses de Dirac [Brézis-Coron-Lieb]

$$\mathcal{J}n'' = \det(\nabla n)'' = \alpha_N \sum_{i=1}^m d_i \delta_{x_i}.$$

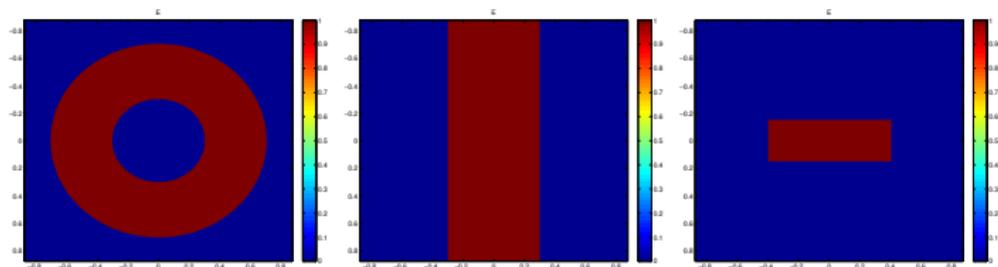
Dans notre cas, n n'est souvent qu'une fonction **BV**.

- Peut-on concevoir un terme **plus robuste** qui charge les ensembles singuliers de $n \in BV$?

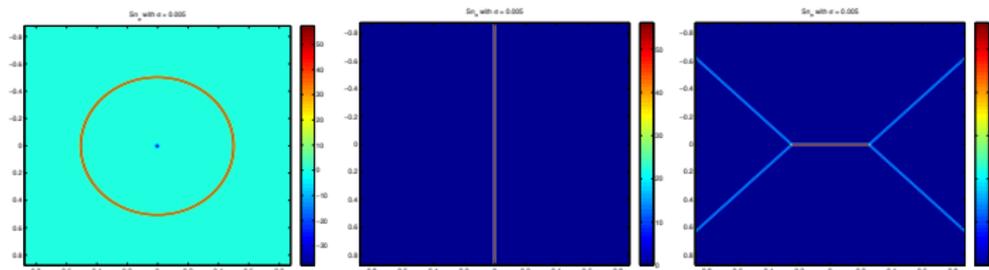
Squelette: Exemples

Squelette = l'ensemble singulier de la fonction distance signée, i.e. l'endroit où elle n'est pas différentiable.

Quelques configurations...



et le support de leurs squelettes



Caractérisation du squelette d'un ensemble E avec un terme de saut

- Un champ de normal associé à la fonction distance signée $\text{dist}(\cdot, E)$ est

$$n = \nabla \text{dist}(\cdot, E)$$

- n vérifie $\|n\|^2 = 1$, donc on a

$$\nabla \|n\|^2 = 2(\nabla^T n n) = \vec{0},$$

si n est régulier.

- On définit le *terme de saut* Sn^σ :

$$Sn^\sigma = \langle n^\sigma, (\nabla^T n^\sigma) n^\sigma \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq N} n_i^\sigma (\partial_j n_i^\sigma) n_j^\sigma$$

où $n^\sigma = k^\sigma * n$ avec $k^\sigma = \frac{1}{\sigma^N} k(\frac{\cdot}{\sigma})$ l'approximation de l'unité.

Que dire de $\lim_{\sigma \rightarrow 0} Sn^\sigma$?

SBV = espace des fonctions à variation bornée dont la cantorienne est nulle (e.g., les $\mathbb{1}_E$ avec E de périmètre fini)

Theorème (Bretin-H.-Masnou)

Soit $n \in SBV(\mathbb{R}^N, S^{N-1})$ tel que son ensemble de discontinuité Σ est C^1 et orienté par un vecteur unitaire ν . Alors, lorsque $\sigma \rightarrow 0$,

$$Sn^\sigma \rightarrow \frac{1}{12} |[n]|^2 \langle [n], \nu \rangle \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Sigma \quad \text{dans } D'(\Omega), \quad (1)$$

où $[n]$ est le saut de n .

Illustrations de S_n^σ

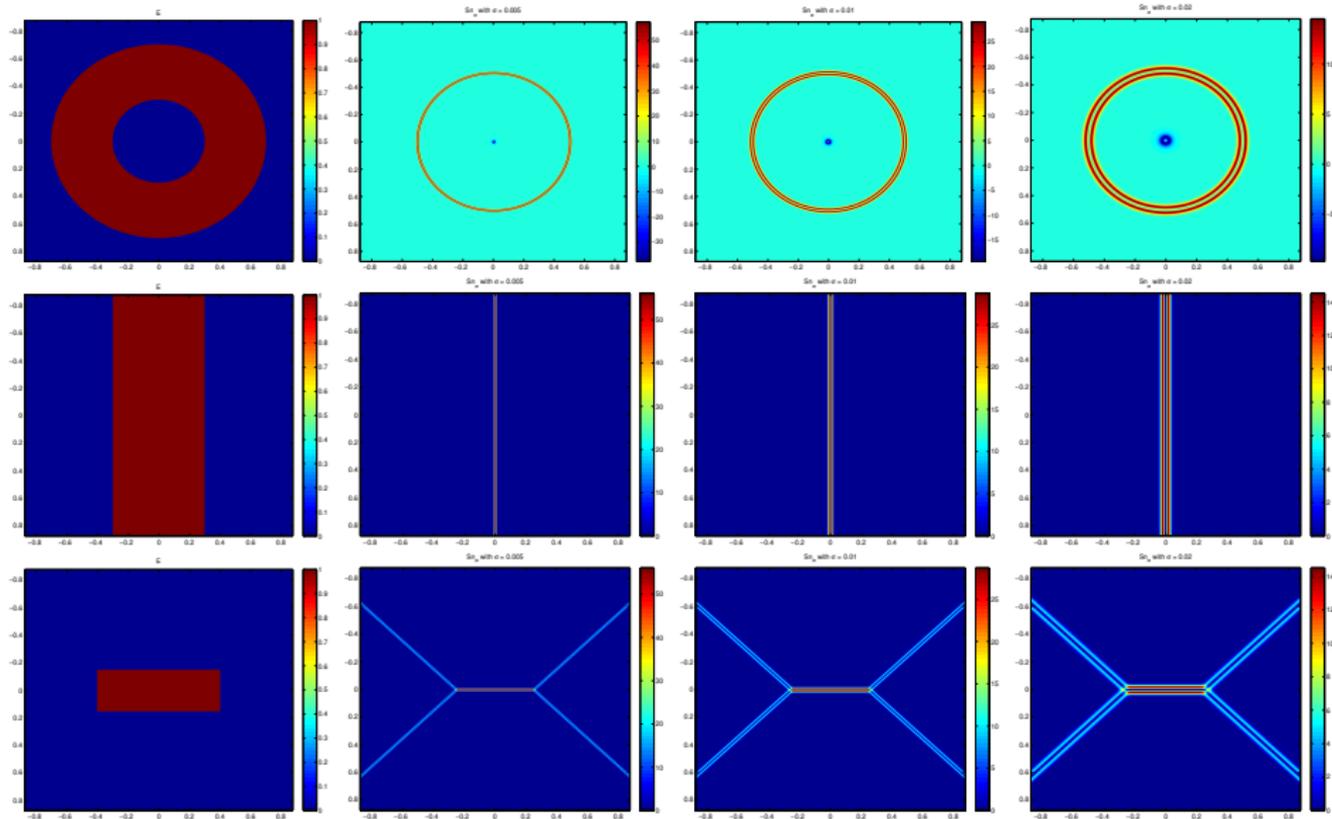
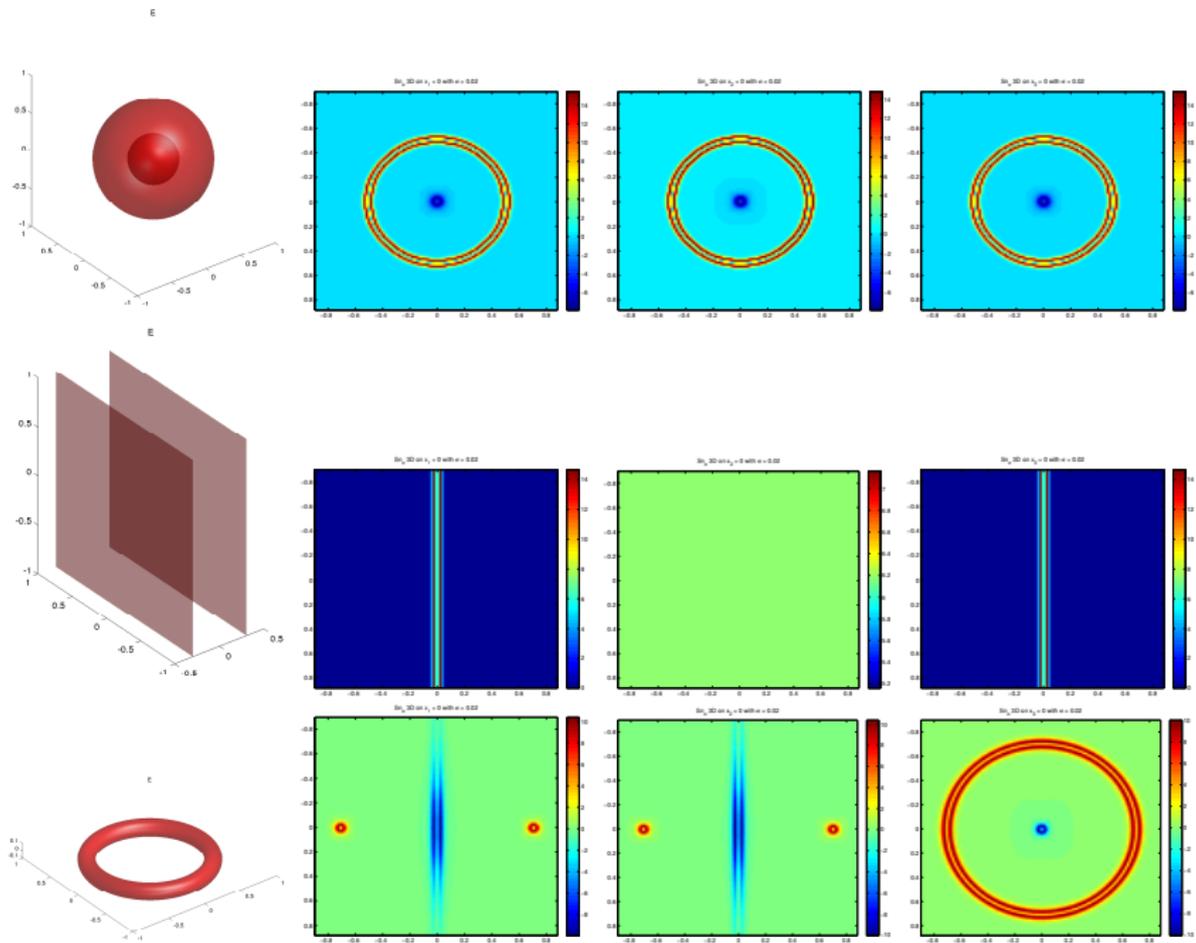


Figure: Approximation numérique de S_n^σ avec $\sigma = 0.005, 0.01$ et 0.02 .



Conjecture

L'analyse asymptotique de diverses configurations conduit à la conjecture suivante:

$$\begin{aligned} S_n^\sigma &\simeq \alpha_0 \mathcal{H}_{|\Sigma_{N-1}}^{N-1} + \sigma \alpha_1 \mathcal{H}_{|\Sigma_{N-2}}^{N-2} + \sigma^2 \alpha_2 \mathcal{H}_{|\Sigma_{N-3}}^{N-3} + \dots \\ &\simeq \sum_{j=0}^{N-1} \sigma^j \alpha_j \mathcal{H}_{|\Sigma_{N-1-j}}^{N-1-j} \end{aligned}$$

où

- α_j sont les fonctions (signées) de densité;
- Σ_j sont de dimension j ;
- l'ensemble de discontinuité de n vérifie $\Sigma(n) = \bigcup_j \Sigma_j$.

Equation d'Allen-Cahn avec une pénalisation topologique

- Considérons l'équation d'Allen-Cahn avec terme de saut régularisé:

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \frac{G'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2} (1 + f_{u^\varepsilon}^\sigma),$$

où

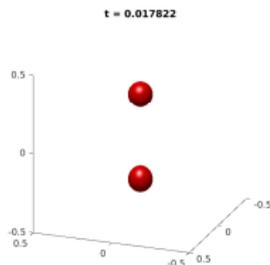
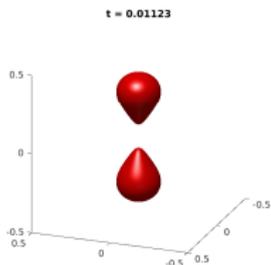
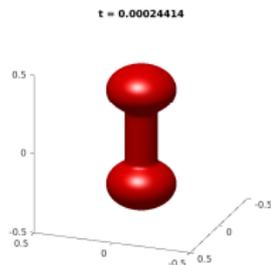
$$f_{u^\varepsilon}^\sigma = c(k^\sigma * |Sn_{u^\varepsilon}^\sigma|), \quad \text{et} \quad n_{u^\varepsilon}^\sigma = k^\sigma * \frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|}.$$

- Schéma numérique: on utilise une approche **quasi-statique**.
On définit $u^{n+1} = v(\cdot, \delta t)$ avec v solution de

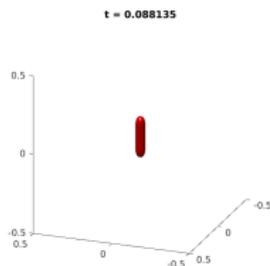
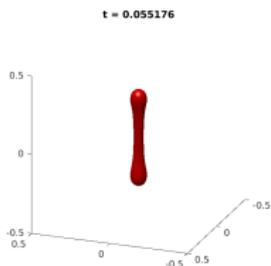
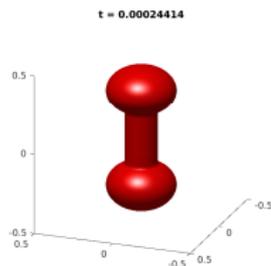
$$\begin{cases} \partial_t v & = \Delta v - \frac{G'(v)}{\varepsilon^2} (1 + f_{u^n}^\sigma) \\ v(\cdot, 0) & = u^n \end{cases}$$

Simulations numériques: l'Haltère

Sans le terme de saut :

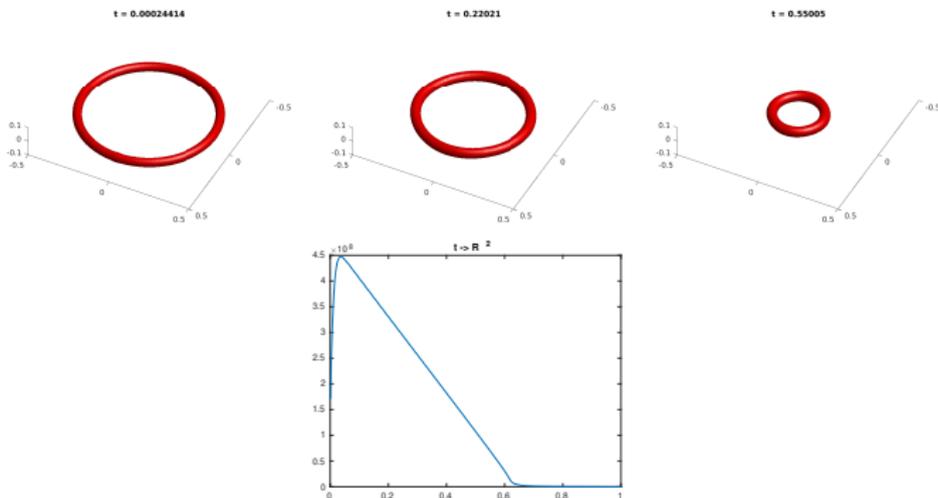


Avec le terme de saut :



Simulations numériques: Un cercle

Analyse numérique:

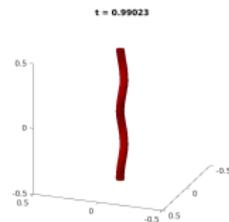
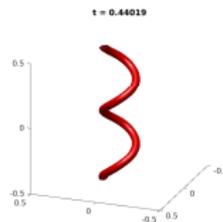
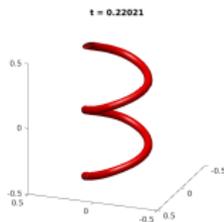
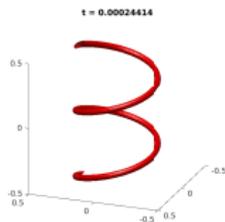


Analyse formelle de la vitesse frontale:

$$V = \frac{R}{\delta^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}}} \right) n(s) \simeq -\frac{1}{2R} \left(1 + O\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right) \right) n,$$

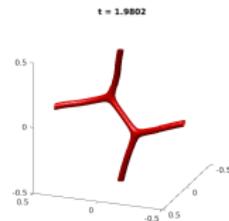
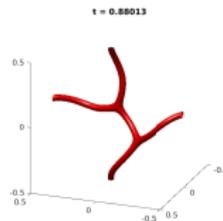
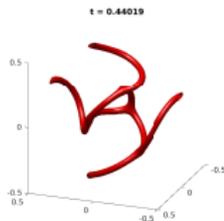
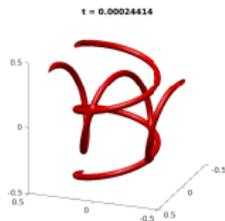
Simulations numériques: évolution de filaments

Cas d'un filament simple:



Vidéo: Evolution d'un filament #1

Cas de deux filaments connexes:

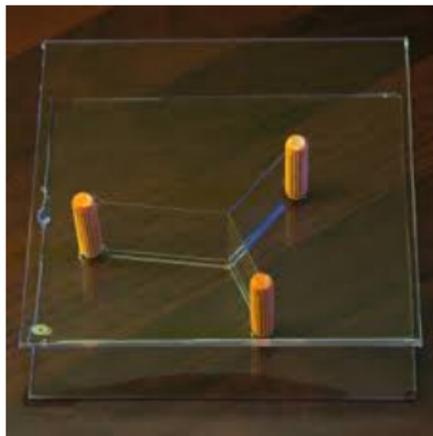
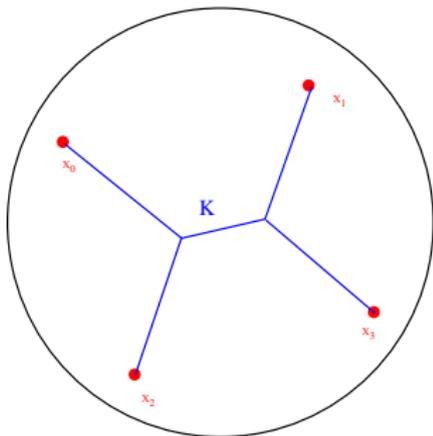


Vidéo: Evolution d'un filament #2

Vidéo: Evolution d'un filament (avec contrainte renforcée)#3

Problème de Steiner

Pour une collection de points x_0, \dots, x_N donnés, trouver un ensemble **connexe et compact** K contenant tous les points x_i et **ayant une longueur minimale**.



Application au problème de Steiner 3D

Soit $K_\sigma = K \oplus \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \sigma)$ l'épaississement de K de taille σ .

- La longueur de K est approchée par le périmètre de K_σ :

$$\text{Per}(K_\sigma) \simeq 2\pi\sigma\mathcal{H}^1(K).$$

- La condition où K contient tous les x_i est remplacée par la contrainte d'inclusion

$$\bigcup_{i=1}^N B(x_i, \sigma) \subset K_\sigma,$$

- Considérons le problème d'optimisation:

$$\min \left\{ \text{Per}(K_\sigma), K_\sigma \text{ connexe, épaisseur } \sigma, \text{ et } \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \sigma) \subset K_\sigma \right\}.$$

Application au problème de Steiner 3D

- On utilise le flot de courbure moyenne par champ de phase avec le terme d'auto-évitant.
- On définit

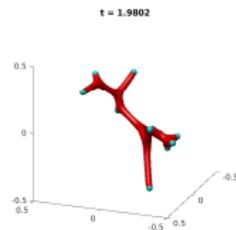
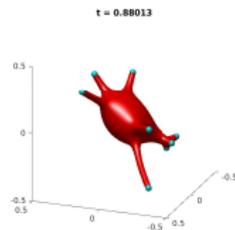
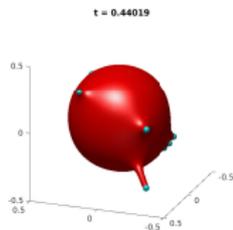
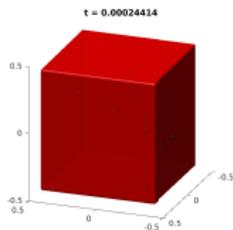
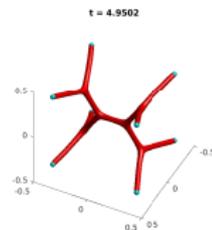
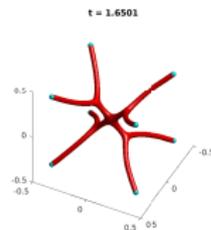
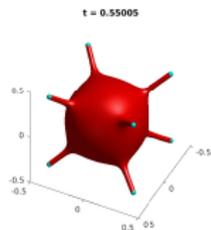
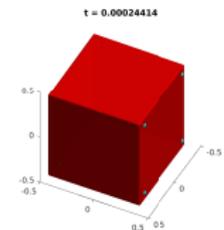
$$u_{\text{in}}^{\varepsilon}(x) = q \left(\frac{\text{dist}(x, \cup_{i=1}^N \{x_i\}) - \sigma}{\varepsilon} \right),$$

où q est le profil optimal classique.

La **contrainte d'inclusion** de tous les x_i s'obtient en imposant l'inégalité suivant :

$$u_{\text{in}}^{\varepsilon} \leq u$$
$$(\implies \cup_{i=1}^N B(x_i, \sigma) \subset \{x \mid u_{\varepsilon}(x) \geq 1/2\})$$

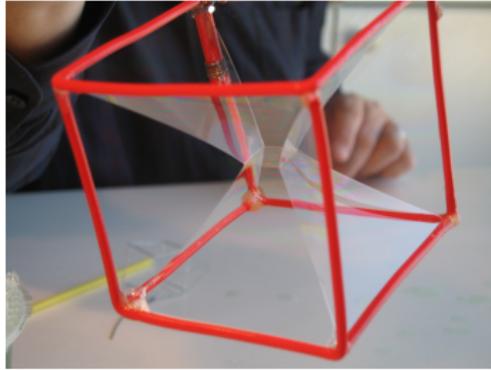
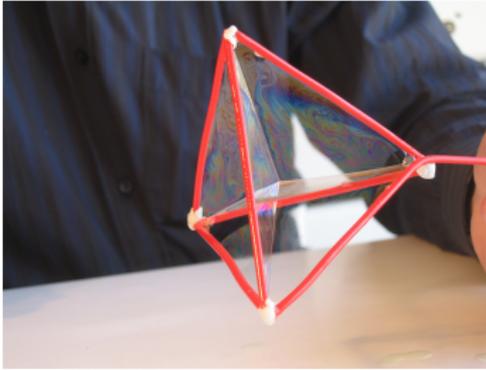
Simulations numériques



Vidéo: Steiner sur cube

Vidéo: Steiner 50 points

Film de savon: Problème de Plateau

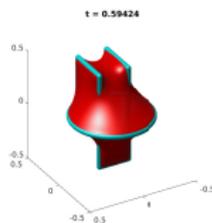
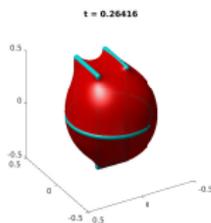
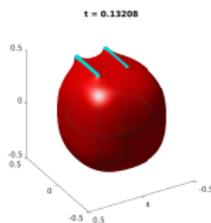
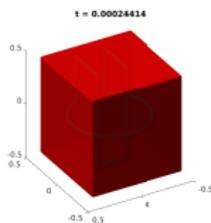


Application au problème de Plateau

- On considère le voisinage tubulaire du bord Γ

$$\Gamma_\sigma := \{x, \text{dist}(x, \Gamma) \leq \sigma\},$$

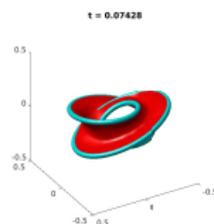
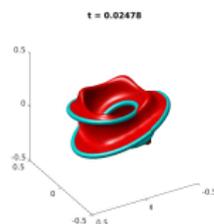
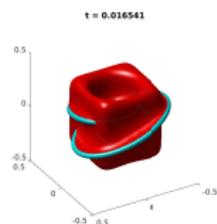
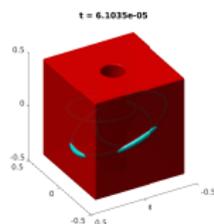
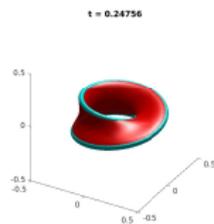
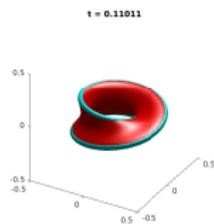
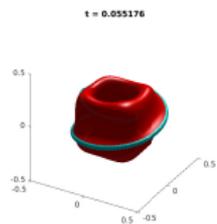
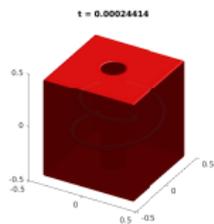
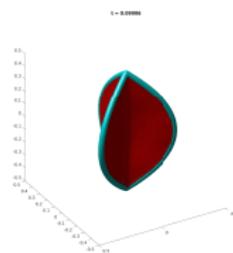
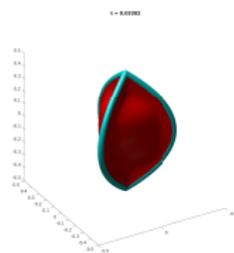
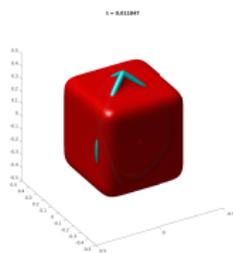
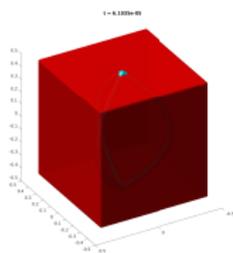
- Avec un **terme de pénalisation de volume** supplémentaire.



- Considérons le problème de minimisation:

$$\min \left\{ \text{Per}(E_\sigma) + \frac{c}{\sigma} \text{Vol}(E_\sigma), E_\sigma \text{ connexe, épaisseur } \sigma, \text{ et } \Gamma_\sigma \subset E_\sigma \right\}.$$

Cas de surfaces non-orientées et jonction triple



Vidéo: Solution de Plateau approchée #1

Vidéo: Solution de Plateau approchée #2

Un résultat hybride: Vidéo: Disque + trois points...

Conclusion

Nous avons introduit un terme de réaction qui force (asymptotiquement) la **conservation topologique** pour l'approximation champ de phase du flot de courbure moyenne en dimensions et codimensions variées.

Ce terme de réaction est introduit dans le contexte de l'approximation champ de phase, mais peut être étendu aux:

- Méthodes **Level set** avec la fonction distance signée;
- Méthodes récentes de représentation de nuages de points basées sur **un réseau de neurones qui apprend la fonction distance signée**, voir e.g. DeepSDF (Park et al'19).

Merci de votre attention!