# Un modèle instationnaire pour l'électroencéphalographie en vue de la compréhension du couplage neuro-vasculaire

Benjamin SULIS
LMR UMR CNRS 9008 - Université de Reims Champagne-Ardenne
SMAI 2021

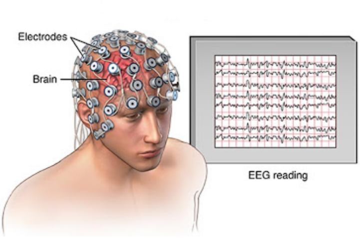
21 juin 2021

Laboratoire
de Mathématiques
de Reims

1. Contexte et modélisation
   - L'électroencéphalographie
   - Approximation quasi-stationnaire des équations de Maxwell
   - Modélisation de l'activité électrique neuronale

2. Potentiel d'action et potentiel post-synaptique
   - Modèle d'Hodgkin-Huxley
   - Courant post-synaptique
   - Potentiel électrique aux électrodes

# Acquisition de données : EEG




- Mesurer l'activité électrique cérébrale
- Non invasif
- Jusqu'à 128 électrodes
- Très bonne résolution en temps [ms]
- Résolution spatiale à améliorer [cm]

**Objectif**

Introduire la dépendance en temps pour le couplage neuro-vasculaire.

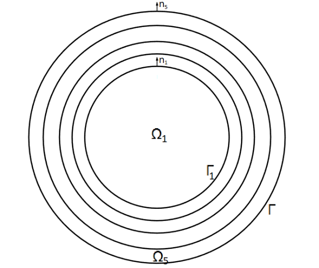
# Modèle stationnaire

## Modèle direct EEG indépendant du temps

Le potentiel électrique $u$ est solution de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F & (\Omega) \\ \sigma \partial_n u = 0 & (\Gamma) \end{cases}$$

avec $\sigma$ conductivité électrique des tissus biologiques.




## Terme source dipolaire

$$F = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}$$

où $\mathbf{q}_m \in \mathbb{R}^d$ le moment et $S_m \in \Omega_2$ la position de la source d'activité neuronale.

# Equations de Maxwell

## Equations de Maxwell

Le champ électrique **E** et le champ magnétique **B** vérifient les équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{M-T}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\mathbf{J} + \varepsilon \partial_t \mathbf{E}) \tag{M-A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{M-F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{M-G}$$

## Paramètres de l'équation

- $\ell$ [m]
- $\tau$ [s]
- $\varepsilon$ [F.m$^{-1}$] (permittivité)
- $\mu$ [H.m$^{-1}$] (perméabilité)
- $\sigma$ [S.m$^{-1}$] (conductivité)

## Motivation

A-t-on réellement besoin de résoudre les équations de Maxwell pour la modélisation de l'EEG ?

# Approximation quasi-stationnaire des équations

## Approximation quasi-statique

Soit $v = \ell/\tau$ la vitesse du système et $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ la vitesse de la lumière dans le milieu. On parle d'approximation quasi-statique quand $v \ll c$.

**Idée :** Exprimer les quantités sans dimension [1]. Soit $\mathbf{E} = e\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B} = b\mathbf{B}'$.

## Trois temps caractéristiques

$\tau_e = \varepsilon/\sigma$ temps de diffusion de la charge électrique
$\tau_m = \mu\sigma\ell^2$ temps de diffusion de la densité de courant
$\tau_{em} = \ell/c$ temps de propagation de l'onde électromagnétique

1. Rapetti, F. Electromagnetic quasi-static models applied to transmission lines. Computing 95, 599–616 (2013)

# Analyse dimensionnelle des équations

## Maxwell-Faraday

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} &\Leftrightarrow \nabla' \times \frac{e}{\ell}\mathbf{E}' = -\frac{b}{\tau}\partial_{t'}\mathbf{B}' \\
&\Leftrightarrow \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\ell}{\tau}\frac{b}{e}\partial_{t'}\mathbf{B}' \\
&\Leftrightarrow \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\tau_{em}}{\tau}\frac{cb}{e}\partial_{t'}\mathbf{B}'
\end{aligned}$$

## Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \partial_{t'} \mathbf{E}) \Leftrightarrow \nabla' \times \mathbf{B}' = \frac{\tau_{em}}{\tau}\frac{e}{cb}\partial_{t'}\mathbf{E}' + \frac{\tau_{em}}{\tau_e}\frac{e}{cb}\mathbf{E}'$$

# Exemple du scalp

## Paramètres dans le scalp

- $\ell = 4 \times 10^{-3}$ [m]
- $\tau = 10^{-2}$ [s]
- $\varepsilon = 4.9 \times 10^{-7}$ [F.m$^{-1}$]
- $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ [H.m$^{-1}$]
- $\sigma = 4 \times 10^{-2}$ [S.m$^{-1}$]

On calcule les trois temps :

- $\tau_m = 8.04 \times 10^{-13}$
- $\tau_{em} = 3.1 \times 10^{-9}$
- $\tau_e = 1.2 \times 10^{-5}$

On a $\tau_m \ll \tau_{em} \ll \tau_e$ et $\tau_e \ll \tau$.

## Approximation quasi-stationnaire

On peut montrer que dans ce cas $cb \ll e$ et on obtient

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\tau_{em}}{\tau}\frac{cb}{e}\partial_{t'}\mathbf{B}' \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} \approx 0$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}' = \frac{\tau_{em}}{\tau}\frac{e}{cb}\partial_{t'}\mathbf{E}' + \frac{\tau_{em}}{\tau_e}\frac{e}{cb}\mathbf{E}' \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} \approx \mu\mathbf{J}$$

# Vers une équation elliptique

## Approximation QS

Les équations sont alors

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \quad (4)$$

- (3) : $\mathbf{E} = -\nabla u$ avec $u = u(t, x)$
- Courant : $\mathbf{J} = \mathbf{j}^p + \mathbf{j}^c$
- Loi d'Ohm : $\mathbf{j}^c = \sigma \mathbf{E}$
- On remplace dans (2) et on applique l'opérateur divergence.

## Equation

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu \nabla \cdot (\mathbf{j}^p - \sigma \nabla u) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p$$

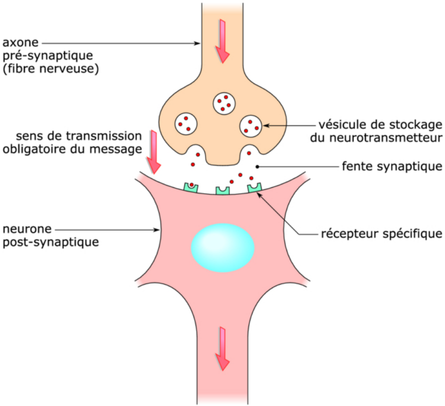
## Terme source en temps

$$F(t) := \nabla \cdot \mathbf{j}^p = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{q}_m(t) \cdot \nabla \delta_{S_m}$$

1. Contexte et modélisation
    - L'électroencéphalographie
    - Approximation quasi-stationnaire des équations de Maxwell
    - Modélisation de l'activité électrique neuronale

2. Potentiel d'action et potentiel post-synaptique
    - Modèle d'Hodgkin-Huxley
    - Courant post-synaptique
    - Potentiel électrique aux électrodes

# A l'échelle du neurone




- $I$ courant appliqué
- $V_{PA}$ potentiel d'action
- $V_{PS}$ potentiel post-synaptique
- $I_{PS}$ courant post-synaptique

# Potentiel d'action

## Modèle d'Hodgkin-Huxley

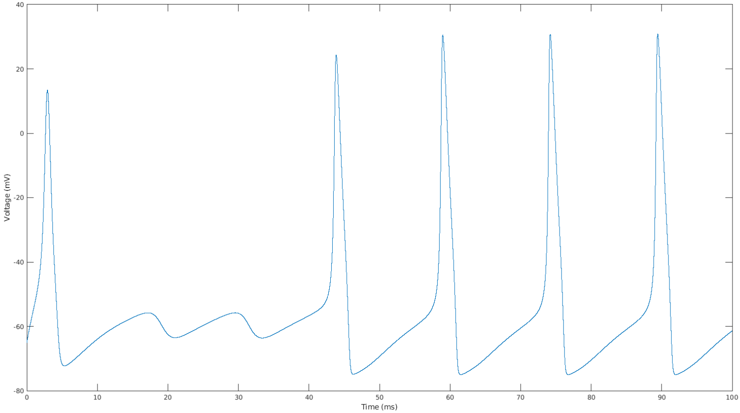
$$
\begin{cases}
-C\dfrac{\mathrm{d}V_{PA}}{\mathrm{d}t} = m^3 h \bar{g_{Na}}(V_{PA} - E_{Na}) + n^4 \bar{g_K}(V_{PA} - E_K) + \bar{g_L}(V_{PA} - E_L) - I \\
\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \alpha_n(V_{PA})(1-n) - \beta_n(V_{PA})n \\
\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha_m(V_{PA})(1-m) - \beta_m(V_{PA})m \\
\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \alpha_h(V_{PA})(1-h) - \beta_h(V_{PA})h
\end{cases}
$$

## Paramètres

Les constantes sont obtenues par des estimations et les fonctions $\alpha_X$ et $\beta_X$ dépendent de $V_{PA}$.

# Simulation d'un potentiel d'action

Résolution du système d'EDO avec un schéma d'Euler implicite sous Matlab.




Potentiel d'action $V_{PA}$ pour une stimulation $I$ de 9mA

# Potentiel et courant post-synaptique

## Potentiel post-synaptique

$$\begin{cases} -C\dfrac{\mathrm{d}V_{PS}}{\mathrm{d}t} = \bar{g}s(V_{PS} - \tilde{V}) \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = K_1[T](V_{PA})(1-s) - K_2 s \end{cases}$$

## Lien avec le potentiel d'action

$[T]$ est la concentration en neurotransmetteurs donnée par

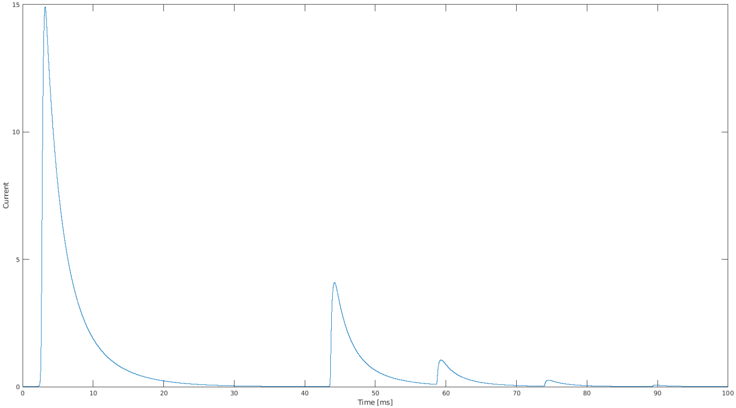
$$[T](V_{PA}) = \frac{T_{max}}{1 + \exp(-(V_{PA} - V_T)/K_p)}$$

## Courant post-synaptique

$$I_{PS} = \bar{g}s(V_{PS} - \tilde{V})$$

# Simulation d'un courant post-synaptique

Résolution du système d'EDO avec un schéma d'Euler implicite sous Matlab.




Courant $I_{PS}$ pour le neurotransmetteur $\mathrm{GABA_A}$

# En résumé

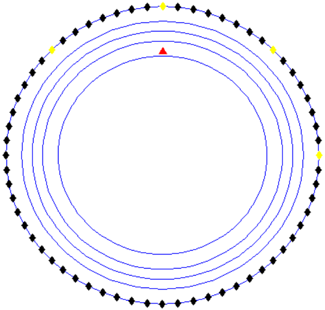
**Étapes de calcul du terme source $F$ du modèle EEG instationnaire :**

- Résoudre le système d'EDO de Hodgkin-Huxley pour obtenir le potentiel d'action $V_{PA}$
- Résoudre le système d'EDO qui donne le potentiel post-synaptique $V_{PS}$ à partir du potentiel d'action $V_{PA}$
- Calculer $I_{PS}$ à partir de $V_{PS}$, puis poser $\mathbf{q}_m(t) = I_{PS}(t)$ dans le terme source du modèle EEG

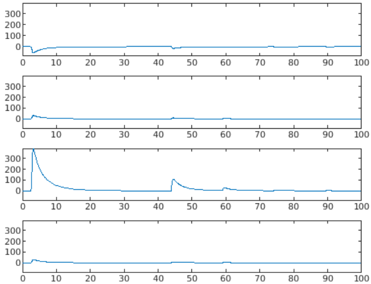
$$F(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{q}_m(t) \cdot \nabla \delta_{S_m}$$

# Potentiel électrique aux électrodes

Résolution numérique du modèle direct EEG sous FreeFem++ (méthode de soustraction, éléments finis P1).

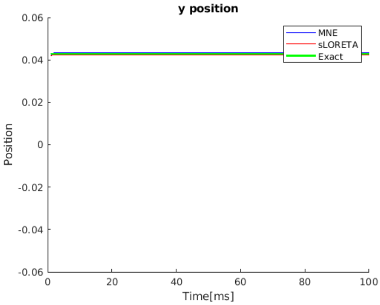


Source et placement des électrodes

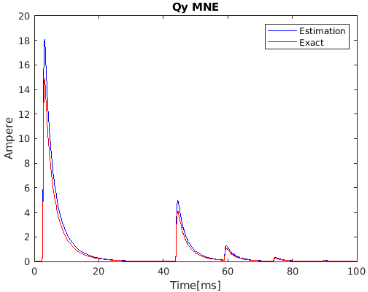



Potentiel électrique (en mV) mesuré aux électrodes au cours du temps

# Perspectives




- Étude mathématique du problème direct (régularité en temps, sources mobiles)
- Analyse mathématique, théorique et numérique, du problème inverse de sources en EEG




- Mener ce travail pour la tomographie optique diffuse
- Proposer un modèle pour le couplage neuro-vasculaire