Schéma faible Mach pour les écoulements diphasiques dilatables à interface raide

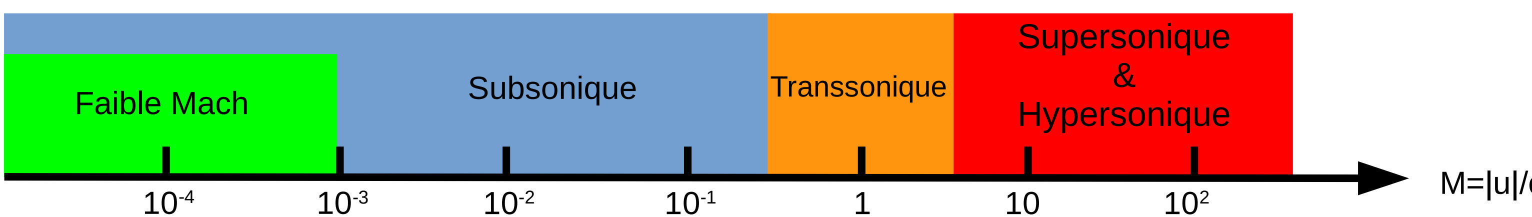
N. Grenier, Z. Zou, C. Tenaud, E. Audit

SMAI 2021

LISN
LABORATOIRE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES DU NUMÉRIQUE
université PARIS-SACLAY
cnrs

Contexte

- Écoulements diphasiques
  - Grands ratio de densité et vitesse du son
  - Avec effets de tension superficielle et changement de phase
  - Liquide : régime faible Mach
  - Gaz : dilatation

Contexte

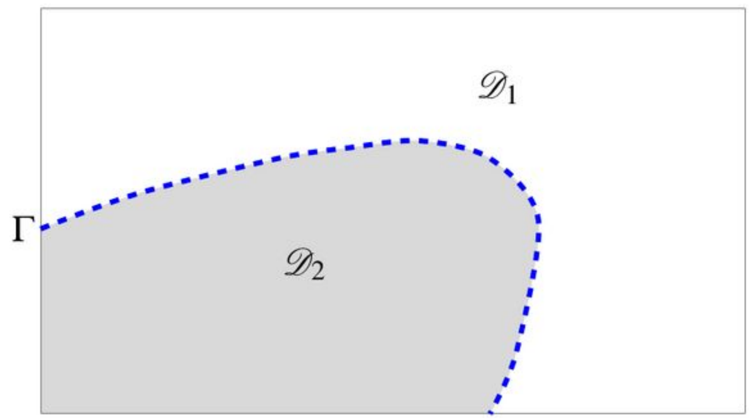
- Méthodes numériques pour le régime faible Mach

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Système compressible continu} \arrow[r, "M \longrightarrow 0", "\text{Limite asymptotique}"'] \arrow[d, "\text{Discrétisation}"'] & \text{Système faible Mach continu} \arrow[d, "\text{Discrétisation}"] \\
\text{Système compressible discret} \arrow[r, "M \longrightarrow 0", "\text{Limite asymptotique}"'] & \text{Système faible Mach discret}
\end{tikzcd}
$$

Objectifs

Développer un solveur compressible de type Godunov pour le liquide et le gaz

- Précis dans le régime faible Mach
- Précis pour la capture d’interface
- Avec de bonnes propriétés de convergence



Objectifs

Développer un solveur compressible de type Godunov pour le liquide et le gaz

- Précis dans le régime faible Mach
- Précis pour la capture d'interface
- Avec de bonnes propriétés de convergence

Stratégie

A partir d'un schéma monofluide de type Lagrange-Projection [Chalons et al. 2016]

- Schéma ordre élevé pour la capture d'interface
- Solveur de Riemann approché avec conditions de saut et terme source
- Analyse faible Mach adapté aux écoulements diphasiques
- Proposition d'une nouvelle correction faible Mach

Plan de l’exposé

- Équations continues
- Discrétisation
- Correction faible Mach
- Résultats numériques

Plan de l’exposé

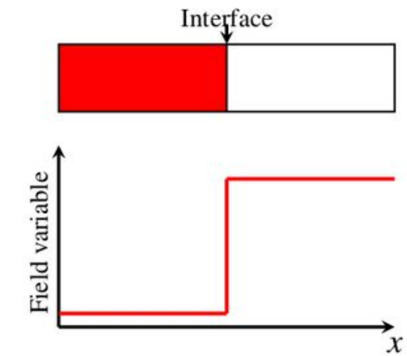
- Équations continues
- Discrétisation
- Correction faible Mach
- Résultats numériques

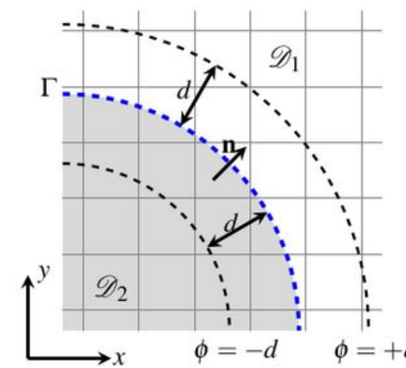
Description de l’interface

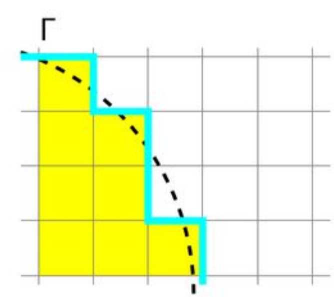
- Approche interface raide
- Méthode Level-Set [Osher & Sethian 1988]
  - Fonction distance signée ϕ
  - Éq. d’advection

$$\partial_t \phi + \mathbf{u}_\Gamma \cdot \nabla \phi = 0$$

- Interface alignée avec le maillage







Système complet

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) & = 0, & \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) & +\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p & = \nabla \cdot \mathbb{S}_v & +\rho \nabla \Psi, \\ \partial_t (\rho E) & +\nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{u}) & = \nabla \cdot (\mathbb{S}_v \mathbf{u}) & +\rho \nabla \Psi \cdot \boldsymbol{u} + \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T), \\ \partial_t \phi & +\mathbf{u}_\Gamma \cdot \nabla \phi & = 0 & \end{cases}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{e} + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}; \ \mathbb{S}_v : \text{tenseur visqueux}; \ \mathcal{K} : \text{conductivité thermique}$$

$$\mathrm{g} = \nabla \Psi, \ \Psi : \text{potentiel gravitationnel}$$

+ loi d'état de type gaz raide
+ conditions de saut à l'interface :

- masse $[\![\rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\Gamma) \cdot]\!]_\Gamma = 0$
- tenseur des contraintes $[\![p]\!]_\Gamma = \sigma \kappa + 2 [\![\mu \frac{\partial u_n}{\partial n}]\!]_\Gamma - [\![\frac{1}{\rho}]\!]_\Gamma \dot{m}^2$
- énergie $[\![\mathcal{K} \nabla T]\!]_\Gamma \cdot = \dot{m} L_{heat}$

Principe du splitting (monophasique)

- Décomposition Acoustique / Transport

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\rho\nabla\cdot\mathbf{u} & +\mathbf{u}\cdot\nabla\rho & =0, \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) & +\rho\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla p & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho\mathbf{u}) & =0, \\ \partial_t(\rho E) & +\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla(p\mathbf{u}) & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho E) & =0 \end{cases}$$

Valeurs propres : $\mathbf{u}\cdot n-c,\ \mathbf{u}\cdot n,\ \mathbf{u}\cdot n+c$

Système acoustique

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\rho\nabla\cdot\mathbf{u} & =0, \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) & +\rho\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla p & =0, \\ \partial_t(\rho E) & +\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla(p\mathbf{u}) & =0 \end{cases}$$

Valeurs propres : $-c,\ 0,\ +c$

Système transport

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\mathbf{u}\cdot\nabla\rho & =0, \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho\mathbf{u}) & =0, \\ \partial_t(\rho E) & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho E) & =0 \end{cases}$$

Valeurs propres : $(\mathrm{u}\ \cdot n)\mathbb{I}^{d+2}$

Splitting du système diphasique

- Décomposition Acoustique / Transport / Diffusion

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\rho \nabla \cdot \mathbf{u} & +\mathbf{u} \cdot \nabla \rho & = 0 & , \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) & +\rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p & +\mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) & = -\rho \nabla \Psi & +\nabla \cdot \mathbb{S}_v, \\ \partial_t (\rho E) & +\rho E \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla (p \mathbf{u}) & +\mathbf{u} \cdot \nabla (\rho E) & = -\mathbf{u} \rho \nabla \Psi & +\nabla \cdot (\mathbb{S}_v \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T), \\ \partial_t \phi & & +\mathbf{u} \cdot \nabla \phi & = 0 & \end{cases}$$

Système acoustique

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\rho \nabla \cdot \mathbf{u} & = \rho \mathbb{J}_v & , & \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) & +\rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p & = \rho \mathbf{u} \mathbb{J}_v & +\mathbb{J}_c \nabla \phi & -\rho \nabla \Psi, \\ \partial_t (\rho E) & +\rho E \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla (p \mathbf{u}) & = (\rho E + p) \mathbb{J}_v & +\mathbb{J}_c \nabla \phi \cdot \mathbf{u} & -\mathbf{u} \rho \nabla \Psi, \\ \partial_t \phi & & = 0 & & \end{cases}$$

avec $\mathbb{J}_c = [\![p]\!]_\Gamma \delta(\phi) / \|\nabla \phi\|$ Saut de pression

$\mathbb{J}_v = \nabla \cdot \left([\![\mathbf{u}_n]\!]_\Gamma \mathbf{n} \right) \delta(\phi)$ Saut de vitesse

Splitting du système diphasique

- Décomposition Acoustique / Transport / Diffusion

$$\left\{\begin{array}{lllll}\partial_t\rho & +\rho\nabla\cdot\mathbf{u} & +\mathbf{u}\cdot\nabla\rho & =0 & , \\ \partial_t\left(\rho\mathbf{u}\right) & +\rho\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla p & +\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\rho\mathbf{u}\right) & =-\rho\nabla\Psi & +\nabla\cdot\mathbb{S}_v, \\ \partial_t\left(\rho E\right) & +\rho E\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla\left(p\mathbf{u}\right) & +\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\rho E\right) & =-\mathbf{u}\rho\nabla\Psi & +\nabla\cdot\left(\mathbb{S}_v\mathbf{u}\right)+\nabla\cdot\left(\mathcal{K}\nabla T\right), \\ \partial_t\phi & & +\mathbf{u}\cdot\nabla\phi & =0 & \end{array}\right.$$

Système transport

$$\left\{\begin{array}{lll}\partial_t\rho & +\mathbf{u}\cdot\nabla\rho & =0, \\ \partial_t\left(\rho\mathbf{u}\right) & +\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\rho\mathbf{u}\right) & =0, \\ \partial_t\left(\rho E\right) & +\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\rho E\right) & =0, \\ \partial_t\phi & +\mathbf{u}\cdot\nabla\phi & =0\end{array}\right.$$

Système diffusion

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t\rho & =0, \\ \partial_t\left(\rho\mathbf{u}\right) & =\nabla\cdot\mathbb{S}_v, \\ \partial_t\left(\rho E\right) & =\nabla\cdot\left(\mathbb{S}_v\mathbf{u}\right)+\nabla\cdot\left(\mathcal{K}\nabla T\right), \\ \partial_t\phi & =0\end{array}\right.$$

Splitting du système diphasique

- Décomposition Acoustique / Transport / Diffusion

$$\begin{cases} \partial_t \rho & +\rho\nabla\cdot\mathbf{u} & +\mathbf{u}\cdot\nabla\rho & =0 & , \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) & +\rho\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla p & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho\mathbf{u}) & =-\rho\nabla\Psi & +\nabla\cdot\mathbb{S}_v, \\ \partial_t(\rho E) & +\rho E\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla(p\mathbf{u}) & +\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho E) & =-\mathbf{u}\rho\nabla\Psi & +\nabla\cdot(\mathbb{S}_v\mathbf{u})+\nabla\cdot(\mathcal{K}\nabla T), \\ \partial_t\phi & & +\mathbf{u}\cdot\nabla\phi & =0 & \end{cases}$$

- Algorithme de splitting

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \\ \phi \end{bmatrix}^{n} \xrightarrow{\text{Acoustique}} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \\ \phi \end{bmatrix}^{n+} \xrightarrow{\text{Transport}} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \\ \phi \end{bmatrix}^{n+1-} \xrightarrow{\text{Diffusion}} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \\ \phi \end{bmatrix}^{n+1}$$

Plan de l’exposé

- Équations continues
- Discrétisation
- Correction faible Mach
- Résultats numériques

Étape acoustique

$$
\begin{cases}
L_j \rho_j^{n+} & = \rho_j^n, \\
L_j \left(\rho \mathbf{u}\right)_j^{n+} & = \left(\rho \mathbf{u}\right)_j^n - \dfrac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in (j)} |\partial \Omega_{jk}| \pi^*_{jkjk} - \Delta t \{\rho \nabla \Psi\}_j, \\
L_j \left(\rho E\right)_j^{n+} & = \left(\rho E\right)_i^n - \dfrac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in (j)} |\partial \Omega_{jk}| \pi^*_{jk} u^*_{jk} - \Delta t \{^* \rho \nabla \Psi\}_j, \\
\phi_j^{n+} & = \phi_j^n, \\
L_j & = 1 + \dfrac{\Delta t}{|\Omega_j|} \left(\sum_{k \in (j)} |\partial \Omega_{jk}| u^*_{jk} \right),
\end{cases}
$$

- Flux numérique

$$
u^*_{jk} = \mathbf{n}_{jk} \cdot \frac{a_j \mathbf{u}_j^n + a_k \mathbf{u}_k^n + a_k [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}}}{a_j + a_k} - \frac{\pi_k^n - \pi_j^n - [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}} - (\rho \Delta \Psi)_{jk}^n}{a_j + a_k}
$$

$$
\pi^*_{jk} = \frac{a_k \pi_j^n + a_j (\pi_k^n + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}} + \delta p_{jk})}{a_j + a_k} - \frac{a_j a_k}{a_j + a_k} \mathbf{n_{jk}} (\mathbf{u}_k^n - \mathbf{u}_j^n + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}})
$$

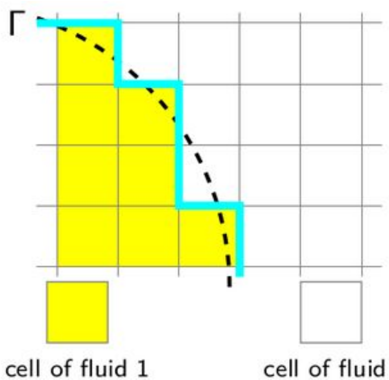
Étape de transport

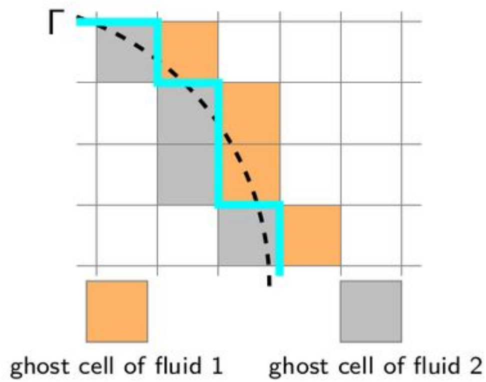
$$\partial_t b + \nabla\cdot(b\mathbf{u}) - b\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad b = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T.$$

- Mise à jour explicite

$$b_j^{n+1-} = b_j^{n+} - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|}\sum_{k\in(j)}|\partial\Omega_{jk}|u^*_{jk}{\color{red}b^{n+}_{jk}} + b_j^{n+}\frac{\Delta t}{|\Omega_j|}\sum_{k\in(j)}|\partial\Omega_{jk}|u^*_{jk},$$

upwind $${\color{red}b^{n+}_{jk}} = \begin{cases} b_j^{n+} & \text{if } u^*_{jk} > 0, \\ b_k^{n+} & \text{if } u^*_{jk} <= 0 \;\&\; \phi_j\phi_k > 0, \\ {\color{green}b^{n+}_{k,g}} & \text{if } u^*_{jk} <= 0 \;\&\; \phi_j\phi_k < 0. \end{cases}$$ État fantôme





Misc.

- Étape de transport
  - État fantôme défini par extrapolation linéaire
- Advection Level-Set
  - Approche d’ordre élévé, couplée temps-espace (one-step) [Daru et Tenaud 2004]
- Étape de diffusion
  - Schéma Volumes Finis classique (second ordre centré)

Plan de l’exposé

- Équations continues
- Discrétisation
- Correction faible Mach
  - Monofluide
  - Diphasique
- Résultats numériques

Propriété *Asymptotic-Preserving*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Système compressible continu} \arrow[r, "M \longrightarrow 0", "\text{Limite asymptotique}"'] \arrow[d, "\text{Discrétisation}"'] & \text{Système faible Mach continu} \arrow[d, "\text{Discrétisation}"] \\
\text{Système compressible discret} \arrow[r, "M \longrightarrow 0", "\text{Limite asymptotique}"'] & \text{Système faible Mach discret}
\end{tikzcd}$$

- Monofluide
  - Erreur de troncature uniforme par rapport à M
- Diphasique
  - Grands ratio de densité et vitesse du son
  - Erreur de troncature uniforme par rapport à ces ratios

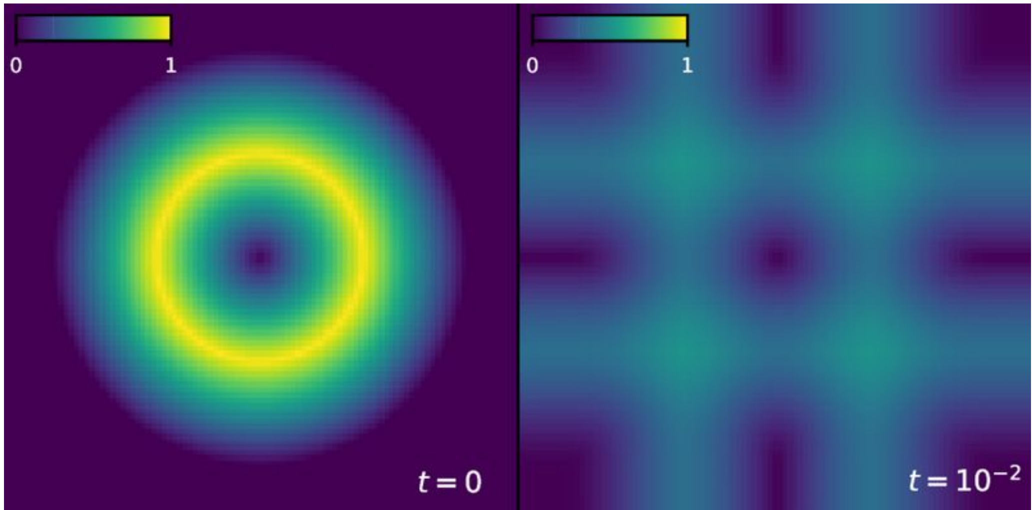
Diffusion numérique excessive : illustration monofluide

- Vortex de Gresho

$$(u_r,\ u_\vartheta) = \begin{cases} (0,\ \ 5r) & 0 \le r < 0.2, \\ (0,\ \ 2-5r) & 0.2 \le r < 0.4, \\ (0,\ \ 0) & r \ge 0.4. \end{cases}$$

$$p(r,\vartheta) = \begin{cases} p_0 + 12.5r^2 & 0 \le r < 0.2, \\ p_0 + 12.5r^2 + 4 - 20r + 4\ln(5r) & 0.2 \le r < 0.4, \\ p_0 - 2 + 4\ln 2 & r \ge 0.4, \end{cases}$$

$$\rho = 1, \quad p_0 = \frac{\rho}{\gamma M^2}, \quad M = 10^{-4}$$



Instantanés de l'amplitude du champ de vitesse

Régime faible Mach monofluide

- Adimensionnement des éq. D'Euler

$$\tilde{\rho} = \rho/\hat{\rho}_1, \quad \tilde{p} = p/\hat{p}_1, \quad \tilde{c} = c/\hat{c}_1, \quad \tilde{e} = e/\hat{e}_1, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\hat{\rho}_1,$$

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho} & +\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) & = 0, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) & +\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\otimes\tilde{\mathbf{u}}) + \dfrac{1}{M^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} & = 0, \\ \partial_{\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{E}\right) & +\tilde{\nabla}\cdot\left((\tilde{\rho}\tilde{E}+p)\tilde{\mathbf{u}}\right) & = 0, \end{cases}$$

- Développement asymptotique

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) = M^0\tilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) + M^1\tilde{\mathcal{A}}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) + M^2\tilde{\mathcal{A}}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{t}) + \cdots, \qquad \tilde{t} > 0.$$

$$\boxed{\tilde{\nabla}\tilde{p} = O\left(M^2\right), \quad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = O\left(M\right), \quad \tilde{t} > 0}$$

Correction faible Mach

- Analyse erreur de troncature (étape acoustique)

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}^{(0)} & & = O(\Delta\tilde{x}M^0) + O(\Delta\tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} & +\dfrac{1}{M^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} & = O\left(\dfrac{\Delta\tilde{x}}{M}\right) + O(\Delta\tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{E}^{(0)} & & = O(\Delta\tilde{x}M^0) + O(\Delta\tilde{t}), \end{cases}$$

$$\pi^*_{jk} = \frac{a_k\pi_j + a_j(\pi_k + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}})}{a_j + a_k} - \frac{a_j a_k}{a_j + a_k}\mathbf{n_{jk}}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}})$$

Corrections de la littérature

$$\pi_{jk}^{*} = \frac{a_k \pi_j + a_j(\pi_k + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}})}{a_j + a_k} - \frac{a_j a_k}{a_j + a_k} \mathbf{n_{jk}}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}})$$

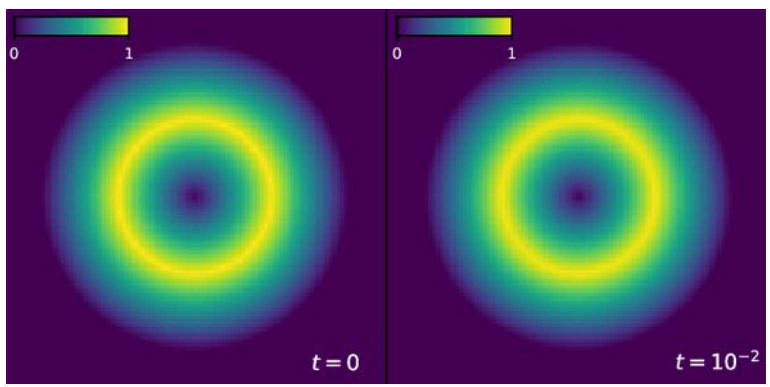
- Pondération par l'impédance acoustique [Peluchon et al. 2017]

$$\pi_{jk}^{*\,\theta,AW} = \frac{a_k \pi_j + a_j(\pi_k + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}})}{a_j + a_k} - \theta_{jk} \frac{a_j a_k}{a_j + a_k} \mathbf{n_{jk}}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}})$$

- Pression centrée [Chalons et al. 2017]

$$\pi_{jk}^{*\,\theta,CP} = (1 - \theta_{jk}) \frac{\pi_j + \pi_k + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}}}{2} - \theta_{jk} \pi_{jk}^{*}$$

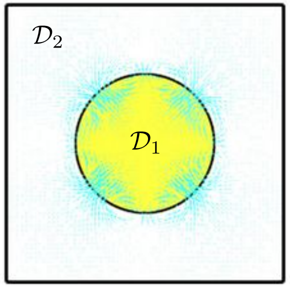
$$\theta_{jk} = min(M_j, M_k, 1)$$



Instantanés de l'amplitude du champ de vitesse avec la correction faible Mach

Cas test diphasique faible Mach

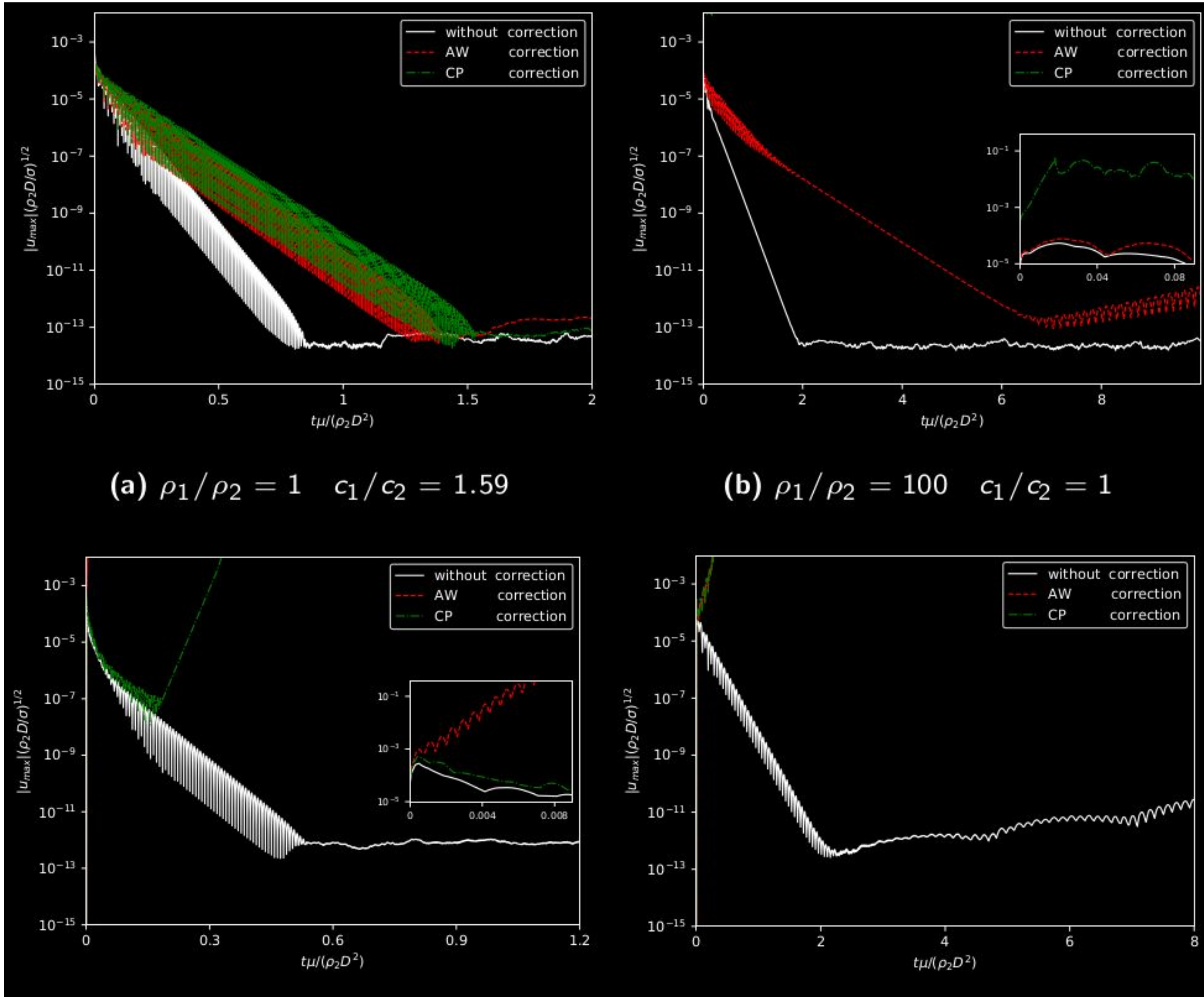
- Bulle statique



$$p_1 - p_2 = \sigma\kappa$$

$$La = 2\rho R\sigma/\mu^2 = 12000$$

$$R = 12.8\Delta x$$



(a) $\rho_1/\rho_2 = 1 \quad c_1/c_2 = 1.59$

(b) $\rho_1/\rho_2 = 100 \quad c_1/c_2 = 1$

(c) $\rho_1/\rho_1 = 1 \quad c_1/c_2 = 40$

(d) $\rho_1/\rho_2 = 100 \quad c_2/c_1 = 100$

Nouvelle correction faible Mach

- Erreur de troncature à travers l'interface

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho}^{(0)} & & = O(1) + O(\Delta \tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}}^{(0)} & + \dfrac{1}{M_i^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} & = O\left(\dfrac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}\right) + O(\Delta \tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{E}^{(0)} & & = O(1) + O(\Delta \tilde{t}), \end{cases}$$

Erreur $O(1)$: estimation de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ donnée par u^*

Erreur $O\left(\frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}\right)$ reliée à $\dfrac{\nabla \hat{p}_2}{\nabla \hat{p}_1} = O\left(\dfrac{\hat{\rho}_2 \hat{u}^2}{\hat{\rho}_1 \hat{u}^2}\right) = \dfrac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}$

Nouvelle correction faible Mach

- Erreur de troncature à travers l'interface

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}^{(0)} & = O(1) + O(\Delta\tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} + \dfrac{1}{M_i^2}\tilde{\nabla}\tilde{p} & = O\left(\dfrac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}\right) + O(\Delta\tilde{t}), \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{E}^{(0)} & = O(1) + O(\Delta\tilde{t}), \end{cases}$$

Erreur $O(1)$: estimation de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ donnée par u^*

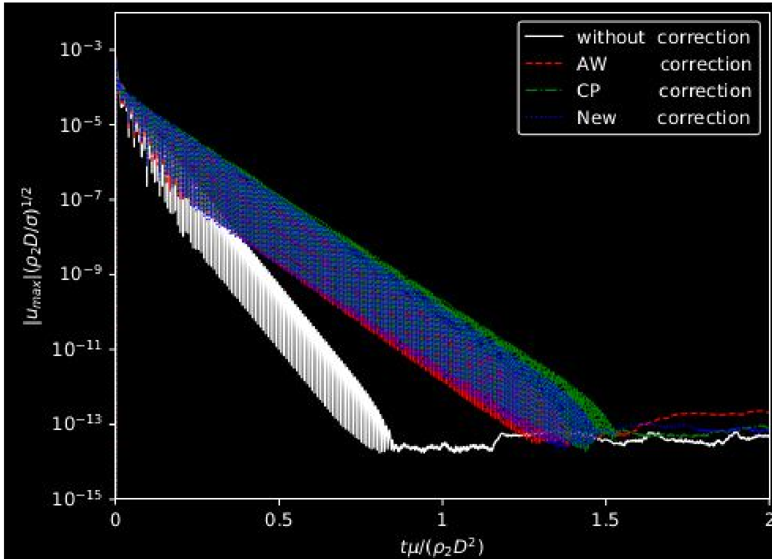
Erreur $O\left(\frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}\right)$ reliée à $\dfrac{\nabla \hat{p}_2}{\nabla \hat{p}_1} = O\left(\dfrac{\hat{\rho}_2 \hat{u}^2}{\hat{\rho}_1 \hat{u}^2}\right) = \dfrac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}$

- Nouvelle correction faible Mach

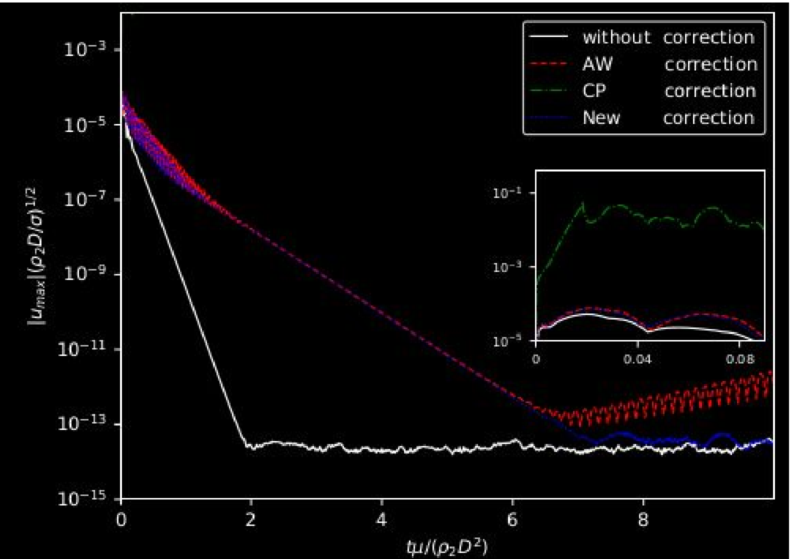
$$u_{jk}^{*,\theta,N} = (1-\theta_{jk})\mathbf{n}_{jk} \cdot \frac{\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_k + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}}}{2} + \theta_{jk}\mathbf{n}_{jk} \cdot \frac{a_j\mathbf{u}_j + a_k\mathbf{u}_k + [\![\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{jk}}}{a_j + a_k} + \frac{\pi_j - \pi_k - [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}}}{a_j + a_k}$$

$$\pi_{jk}^{*,\theta,N} = (1-\theta_{jk})\frac{\rho_k\pi_j + \rho_j(\pi_k + [\![p]\!]_{\Gamma_{jk}})}{\rho_j + \rho_k} + \theta_{jk}\pi_{jk}^*.$$

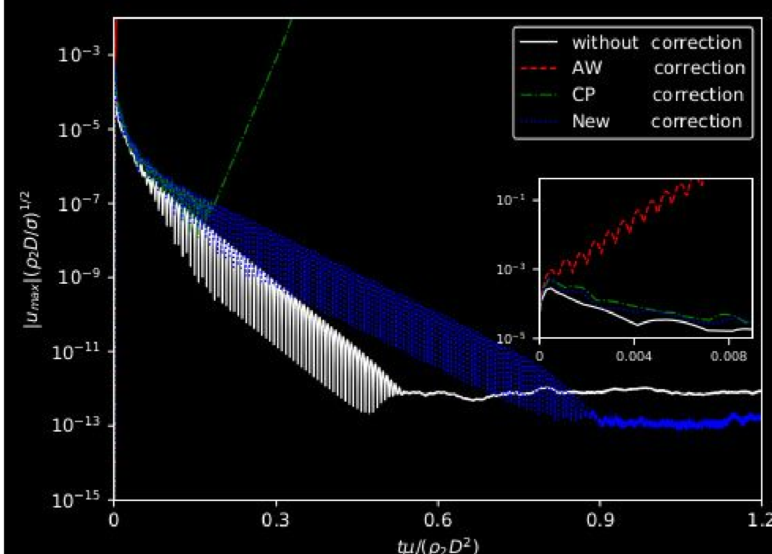
Bulle statique



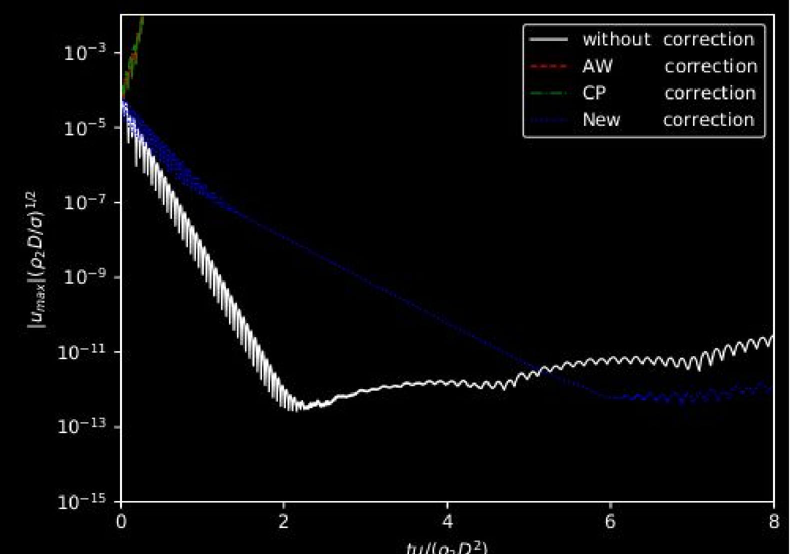
(a) $\rho_1/\rho_2 = 1 \quad c_1/c_2 = 1.59$



(b) $\rho_1/\rho_2 = 100 \quad c_1/c_2 = 1$



(c) $\rho_1/\rho_1 = 1 \quad c_1/c_2 = 40$



(d) $\rho_1/\rho_2 = 100 \quad c_2/c_1 = 100$

Conclusions & perspectives

- Nouvelle correction faible Mach
  - Schéma précis dans le régime bas Mach
  - Bonne propriété de convergence
  - Valide pour grand ratios de densité et vitesse du son
- Validation sur différentes configurations, avec transfert de chaleur et de masse
- Futur : étape acoustique implicite

Merci pour votre attention !

(Remerciements : S. Kokh)

Références

- Bouchut, F. (2004). Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws: And Well-Balanced schemes for sources. Springer Science & Business Media.
- Chalons, C., Girardin, M., and Kokh, S. (2016). An all-regime lagrange-projection like scheme for the gas dynamics equations on unstructured meshes. Communications in Computational Physics, 20(1):188–233.
- Chalons, C., Girardin, M., and Kokh, S. (2017). An all-regime Lagrange-Projection like scheme for 2D homogeneous models for two-phase flows on unstructured meshes. Journal of Computational Physics, 335:885–904.
- Daru, V. and Tenaud, C. (2004). High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. Journal of computational physics, 193(2):563–594.
- Dellacherie, S. (2010). Analysis of godunov type schemes applied to the compressible euler system at low mach number. Journal of Computational Physics, 229(4):978–1016.
- Jiang, G.-S. and Shu, C.-W. (1996). Efficient implementation of weighted eno schemes. Journal of computational physics, 126(1):202–228.
- Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. Journal of computational physics, 79(1):12–49.
- Peluchon, S., Gallice, G., and Mieussens, L. (2017). A robust implicit-explicit acoustic-transport splitting scheme for two-phase flows. Journal of Computational Physics, 339:328–355.
- Sussman, M., Smereka, P., and Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. Journal of Computational physics, 114(1):146–159.