

Optimisation topologique couplée d'une structure mécanique et de ses liaisons vissées

RAKOTONDRAINIBE Lalaina

ALLAIRE Grégoire - ORVAL Patrick

Congrès SMAI 2021

GROUPE RENAULT



21 - 25 juin 2021

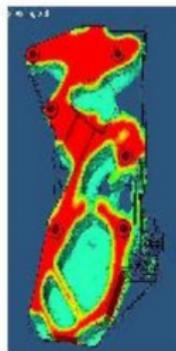
Contexte

Optimisation topologique classique dans l'industrie automobile :

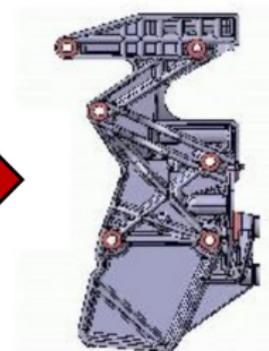
- ▶ Étude sur une seule pièce
- ▶ Les liaisons mécaniques à d'autres pièces sont des conditions fixées



Initial design



Topology optimization



Final design

➔ **Les liaisons mécaniques ne sont pas des variables d'optimisation.**

Objectifs

➔ **Les liaisons mécaniques deviennent des variables d'optimisation.**

Objectifs

➔ **Les liaisons mécaniques deviennent des variables d'optimisation.**

Contributions

Implémenter un démonstrateur qui optimise **simultanément** :

- ▶ **position** et **nombre** des liaisons mécaniques
- ▶ **topologie** de la structure

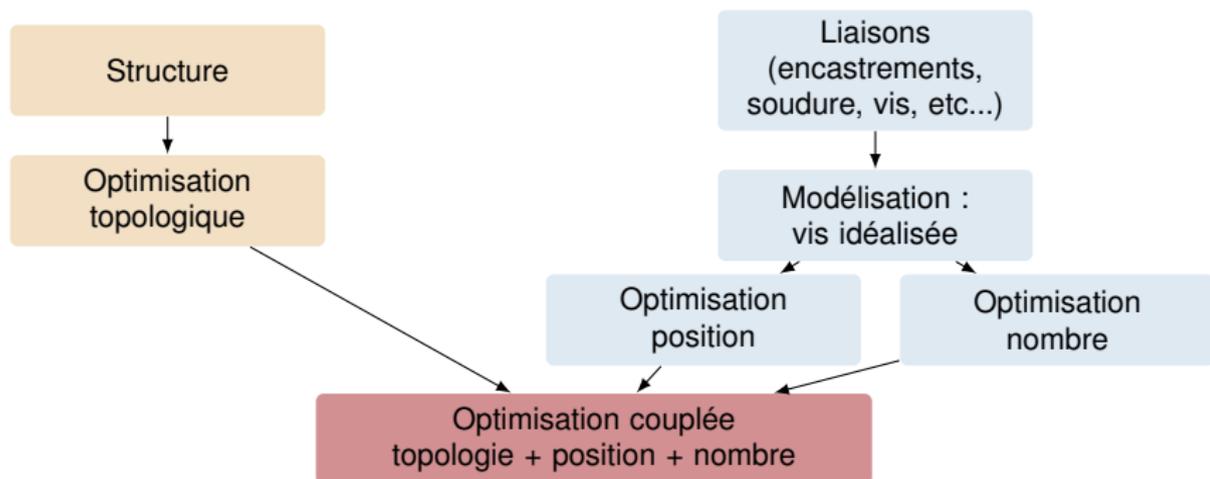
Objectifs

➔ Les liaisons mécaniques deviennent des variables d'optimisation.

Contributions

Implémenter un démonstrateur qui optimise **simultanément** :

- ▶ **position** et **nombre** des liaisons mécaniques
- ▶ **topologie** de la structure



Sommaire

Introduction

Vis idéalisée

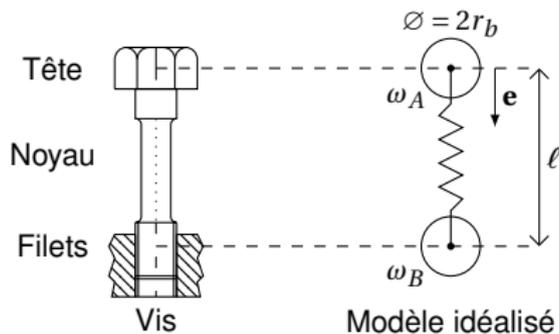
Méthode d'optimisation

Cas test industriel

Conclusion et perspectives

2. Vis idéalisée

Modélisation



Condition d'Euler-Bernoulli (vis longues)

$$\frac{\ell}{r_b} \geq 10$$

ℓ : longueur d'implantation de la vis

r_b : rayon équivalent des filets

Loi de comportement

$$\text{Noyau} \equiv \text{Ressort} \iff \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{L}$$

\mathbf{F} : force généralisée

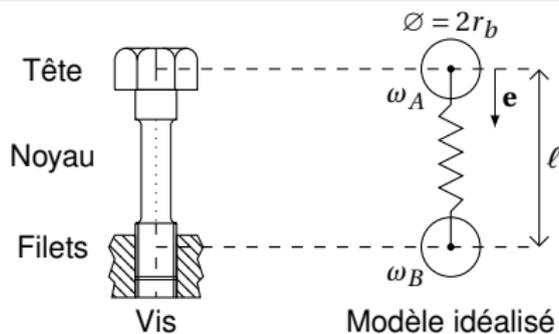
\mathbf{K} : matrice de rigidité

\mathbf{L} : longueur généralisée

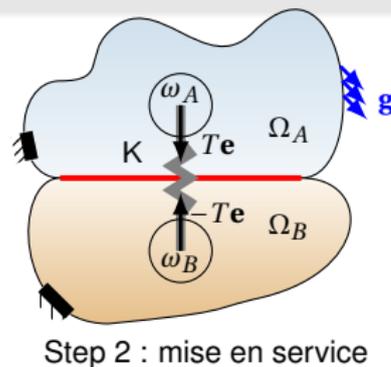
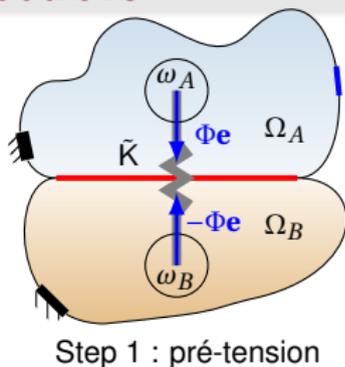


Kerguignas & Caignaert 1977, Guillot 1989

Serrage



Serrage d'une vis



$$K = \bar{K} + \bar{K}$$

\bar{K} : cisaillement / flexion

\bar{K} : traction / torsion

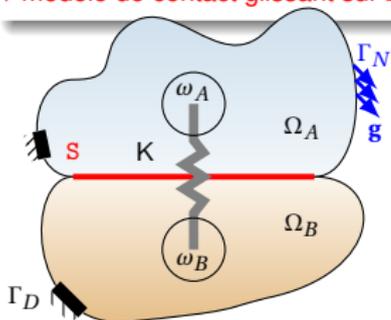
Formulation variationnelle : STEP 2

Trouver $\mathbf{u}_{S2} \in \mathcal{W}$ tel que $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}$,

$$\int_{\Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B)} A\epsilon(\mathbf{u}_{S2}) : \epsilon(\mathbf{w}) dV + (\mathbf{U}_{S2}^B - \mathbf{U}_{S2}^A)^T \mathbf{K}(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

$$= \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dS + \int_{\Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B)} A\epsilon(\mathbf{u}_{S1}) : \epsilon(\mathbf{w}) dV + (\mathbf{U}_{S1}^B - \mathbf{U}_{S1}^A)^T \mathbf{K}(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

+ modèle de contact glissant sur S



\mathbf{u}_{S2} : champ de déplacement dans $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$

$$\mathbf{V}^A = \begin{pmatrix} \int \mathbf{v} dV \\ \frac{1}{2} \int_{\omega_A} \text{rot}(\mathbf{v}) dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\omega_A|} \int \mathbf{v} dV \\ \frac{1}{2|\omega_A|} \int_{\omega_A} \text{rot}(\mathbf{v}) dV \end{pmatrix}$$

pour $\mathbf{V} = \mathbf{U}_{S1}$ ou \mathbf{U}_{S2} ou \mathbf{W}

Formulation variationnelle : STEP 2

Trouver $\mathbf{u}_{S2} \in \mathcal{W}$ such that $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}$,

$$\int_{\Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B)} A\epsilon(\mathbf{u}_{S2}) : \epsilon(\mathbf{w}) dV + (\mathbf{U}_{S2}^B - \mathbf{U}_{S2}^A)^T K(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

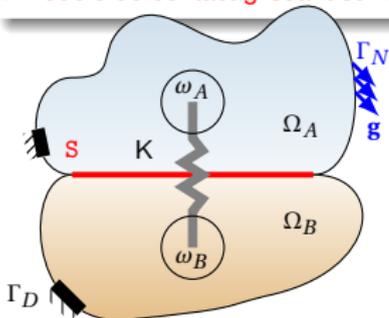
$$= \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dS + \int_{\Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B)} A\epsilon(\mathbf{u}_{S1}) : \epsilon(\mathbf{w}) dV + (\mathbf{U}_{S1}^B - \mathbf{U}_{S1}^A)^T K(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

\Leftrightarrow Trouver $\mathbf{u}_{S2} \in \mathcal{W}$ s.t. $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}$,

$$\int_{\Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B)} A\epsilon(\mathbf{u}_{S2}) : \epsilon(\mathbf{w}) dV + (\mathbf{U}_{S2}^B - \mathbf{U}_{S2}^A)^T K(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

$$= \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dS - \Phi \left(\int_{\omega_B} \mathbf{w} \cdot \mathbf{e} dV - \int_{\omega_A} \mathbf{w} \cdot \mathbf{e} dV \right) + (\mathbf{U}_{S1}^B - \mathbf{U}_{S1}^A)^T \bar{K}(\mathbf{W}^B - \mathbf{W}^A)$$

+ modèle de contact glissant sur S



\mathbf{u}_{S2} : champ de déplacement dans $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$

$$\mathbf{V}^A = \begin{pmatrix} \int_{\omega_A} \mathbf{v} dV \\ \frac{1}{2} \int_{\omega_A} \text{rot}(\mathbf{v}) dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\omega_A|} \int_{\omega_A} \mathbf{v} dV \\ \frac{1}{2|\omega_A|} \int_{\omega_A} \text{rot}(\mathbf{v}) dV \end{pmatrix}$$

pour $\mathbf{V} = \mathbf{U}_{S1}$ ou \mathbf{U}_{S2} ou \mathbf{W}

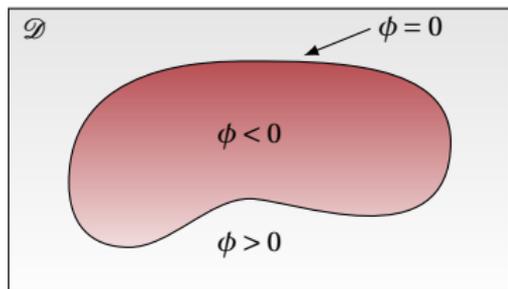
3. Méthode d'optimisation

Structure : méthode *level-set*

Level-Set

Soit le domaine de travail $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . La structure Ω est paramétrée par une fonction ϕ définie dans \mathcal{D} telle que

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \mathcal{D} \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 \iff \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) > 0 \iff \mathbf{x} \in (\mathcal{D} \setminus \Omega) \end{cases}$$



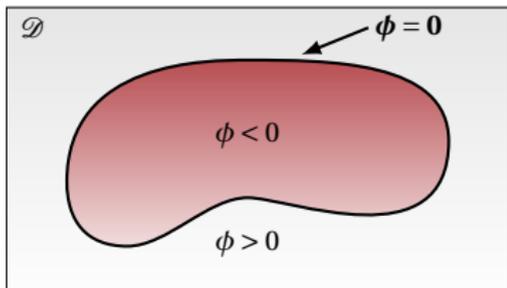
Osher & Sethian 1988

Structure : méthode *level-set*

Level-Set

Soit le domaine de travail $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . La structure Ω est paramétrée par une fonction ϕ définie dans \mathcal{D} telle que

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \mathcal{D} \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 \iff \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) > 0 \iff \mathbf{x} \in (\mathcal{D} \setminus \Omega) \end{cases}$$

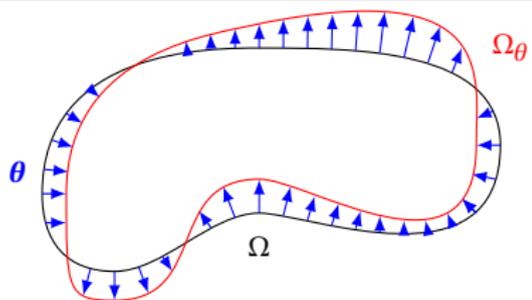


Osher & Sethian 1988

Équation d'advection de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + V|\nabla \phi| = 0 \text{ in } [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \\ \phi(t = 0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

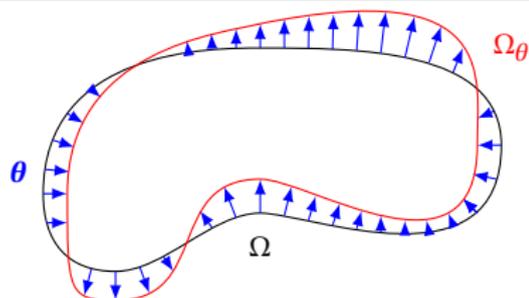
Forme : méthode de variation des frontières de Hadamard



Ω forme de référence, ouvert, régulier
et borné de \mathbb{R}^n

$\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n$ t.q. $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n} < 1$

Forme : méthode de variation des frontières de Hadamard



Ω forme de référence, ouvert, régulier et borné de \mathbb{R}^n

$\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n$ t.q. $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)^n} < 1$

Dérivée de forme

Définition : La dérivée de forme d'une fonctionnelle J en Ω est définie comme la dérivée de Fréchet en 0 du champ $\theta \mapsto J(\mathbf{Id} + \theta)(\Omega)$, i.e

$$J(\mathbf{Id} + \theta)(\Omega) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \text{ avec } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|}$$

où $\theta \mapsto J'(\Omega)(\theta)$ est un champ linéaire continu sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)^n$.

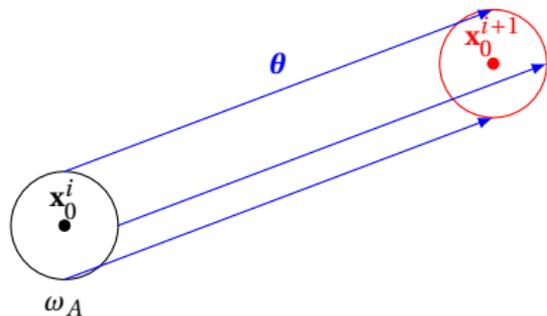
Proposition : Soit J la fonctionnelle de forme, appelée compliance, définie par

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} A\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) dV. \text{ Alors, } J \text{ est dérivable en } \Omega \text{ et on a}$$

$$J'(\Omega)(\theta) = - \int_{\Gamma} A\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})\theta \cdot \mathbf{n} dS.$$



Position de vis : descente de gradient paramétrique



Sphères à forme fixe

\Leftrightarrow mouvement de corps rigide

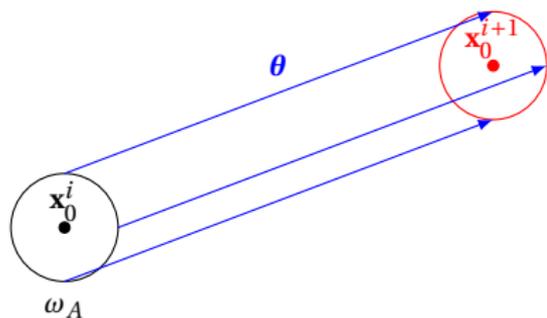
\Leftrightarrow translation (pas de rotation)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{d}$

$\vartheta \in \mathbb{R}$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

Position de vis : descente de gradient paramétrique



Sphères à forme fixe

\iff mouvement de corps rigide

\iff translation (pas de rotation)

$\iff \boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{d}$

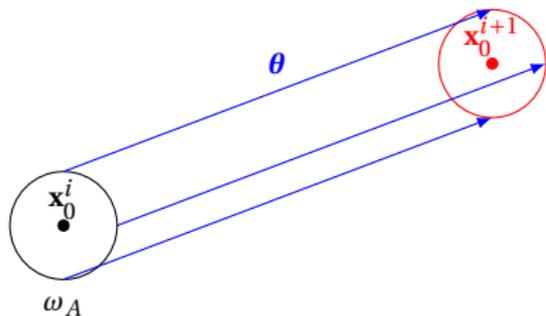
$\vartheta \in \mathbb{R}$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

Descente de gradient

$$\mathbf{x}_0^{i+1} = \mathbf{x}_0^i - \delta^i \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_0}(\Omega, \mathbf{x}_0^i)$$

Position de vis : descente de gradient paramétrique



Sphères à forme fixe

\Leftrightarrow mouvement de corps rigide

\Leftrightarrow translation (pas de rotation)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{d}$

$\vartheta \in \mathbb{R}$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

Descente de gradient

$$\mathbf{x}_0^{i+1} = \mathbf{x}_0^i - \delta^i \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_0}(\Omega, \mathbf{x}_0^i)$$

Gradient paramétrique

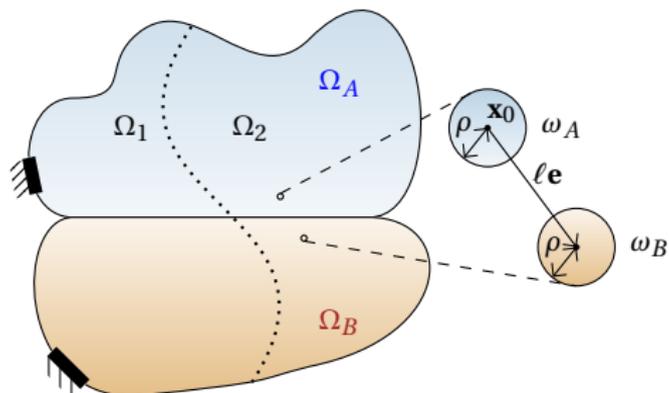
Lemme : Soit J définie par $J(\Omega, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\omega_A|} \int_{\omega_A} f dV$.

Alors, J est dérivable en \mathbf{x}_0 et on a

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_0}(\Omega, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\theta} \right\rangle = J'(\Omega, \mathbf{x}_0)(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\omega_A|} \cdot \int_{\omega_A} f \mathbf{n} dS$$

Nombre de vis : gradient topologique

⇒ Trouver la meilleure position \mathbf{x}_0 et orientation \mathbf{e} pour ajouter une nouvelle petite vis idéalisée



ω : boule unité de \mathbb{R}^n

$$\omega_A = \mathbf{x}_0 + \rho \omega$$

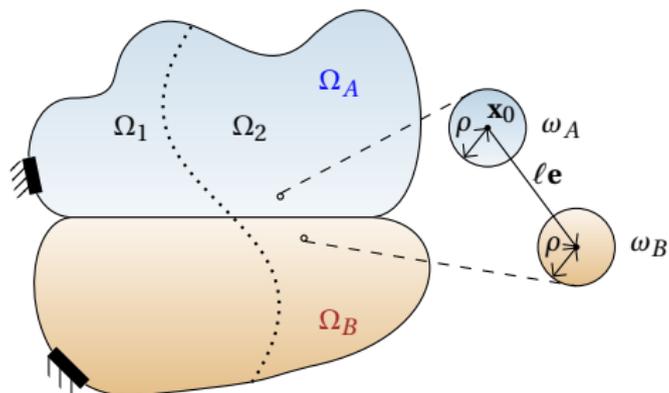
$$\omega_B = \mathbf{x}_0 + \ell \mathbf{e} + \rho \omega$$

$\rho \rightarrow 0$ et ℓ fixe

$$J(\Omega) = \int_{\Omega_1} F(\mathbf{u}) dV + \int_{\Gamma_N} G(\mathbf{u}) dS$$

Nombre de vis : gradient topologique

⇒ Trouver la meilleure position \mathbf{x}_0 et orientation \mathbf{e} pour ajouter une nouvelle petite vis idéalisée



$$J(\Omega) = \int_{\Omega_1} F(\mathbf{u}) dV + \int_{\Gamma_N} G(\mathbf{u}) dS$$

ω : boule unité de \mathbb{R}^n

$$\omega_A = \mathbf{x}_0 + \rho \omega$$

$$\omega_B = \mathbf{x}_0 + \ell \mathbf{e} + \rho \omega$$

$\rho \rightarrow 0$ et ℓ fixe

! Réduction du modèle à 1DDL

$$\kappa(\rho) = K\rho^k, K > 0, k > 0$$

$$\Phi(\rho) = Q\rho^q, Q \geq 0, q > 0$$

- ▶ 2 perturbations, ω_A et ω_B , reliées entre eux
- ▶ évaluation de 2 états
- ▶ 2 paramètres : \mathbf{x}_0 et \mathbf{e}

Nombre de vis : gradient topologique

Définition

La fonction objectif J_ρ admet le gradient topologique $DJ(\mathbf{x}_0, \mathbf{e})$ au point \mathbf{x}_0 pour une petite vis d'axe \mathbf{e} et pour une paire d'inclusions de forme ω , si on a le développement asymptotique suivant pour $\rho > 0$ petit

$$J_\rho(\Omega) = J_0(\Omega) + s(\rho)DJ(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}) + o(s(\rho)),$$

où $s(\rho)$ une fonction scalaire positive en ρ et vérifie $\lim_{\rho \rightarrow 0} s(\rho) = 0$.

Nombre de vis : gradient topologique

Définition

La fonction objectif J_ρ admet le gradient topologique $DJ(\mathbf{x}_0, \mathbf{e})$ au point \mathbf{x}_0 pour une petite vis d'axe \mathbf{e} et pour une paire d'inclusions de forme ω , si on a le développement asymptotique suivant pour $\rho > 0$ petit

$$J_\rho(\Omega) = J_0(\Omega) + s(\rho)DJ(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}) + o(s(\rho)),$$

où $s(\rho)$ une fonction scalaire positive en ρ et vérifie $\lim_{\rho \rightarrow 0} s(\rho) = 0$.

Cas particulier : $\kappa(\rho) = K\rho^2$ et $\Phi(\rho) = Q\rho^2$

Théorème : Soit ω la boule unité de \mathbb{R}^3 .

La fonction objectif J_ρ admet le développement asymptotique suivant

$$J_\rho(\Omega) = J_0(\Omega) + \rho^2(K(\mathbf{U}_{S2} - \mathbf{U}_{S1}) \cdot \mathbf{e} + Q)\mathbf{P}_{S2} \cdot \mathbf{e} + \mathcal{O}(\rho^3).$$

$\mathbf{U}_{S1} = \mathbf{u}_{S1}(\mathbf{x}_0 + \ell \mathbf{e}) - \mathbf{u}_{S1}(\mathbf{x}_0)$ avec \mathbf{u}_{S1} champ de déplacement sain du Step 1

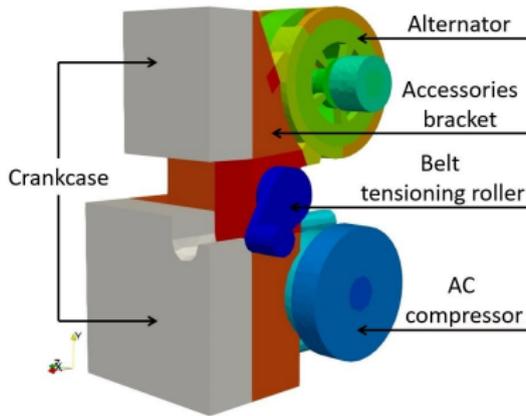
$\mathbf{U}_{S2} = \mathbf{u}_{S2}(\mathbf{x}_0 + \ell \mathbf{e}) - \mathbf{u}_{S2}(\mathbf{x}_0)$ avec \mathbf{u}_{S2} champ de déplacement sain du Step 2

$\mathbf{P}_{S2} = \mathbf{p}_{S2}(\mathbf{x}_0 + \ell \mathbf{e}) - \mathbf{p}_{S2}(\mathbf{x}_0)$ avec \mathbf{p}_{S2} état adjoint sain du Step 2



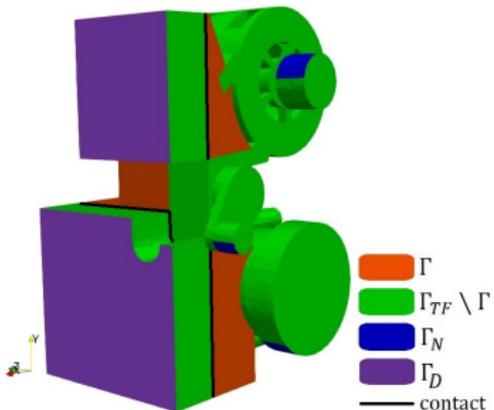
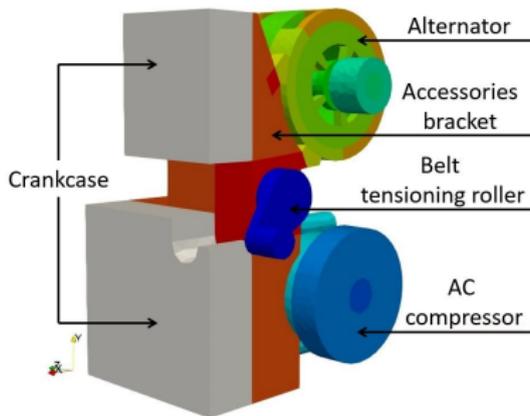
4. Cas test industriel

Face accessoires assemblée



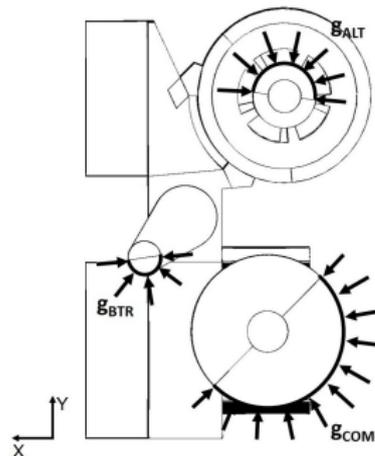
- ▶ Représentativité physique
- ▶ Adaptation des propriétés matériaux et des inerties
- ▶ Réduction du coût de calcul

Face accessoires assemblée

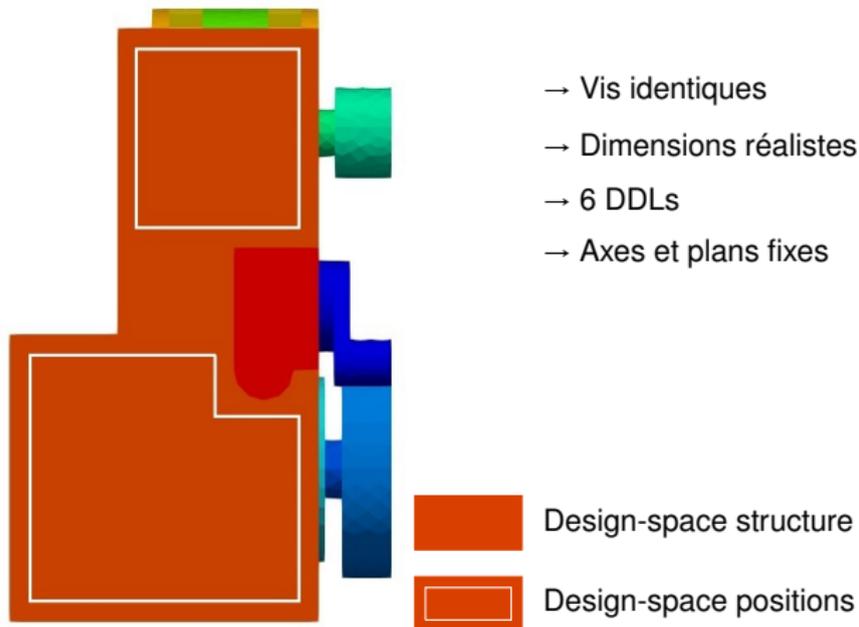


- ▶ Représentativité physique
- ▶ Adaptation des propriétés matériaux et des inerties
- ▶ Réduction du coût de calcul

Cas de charge

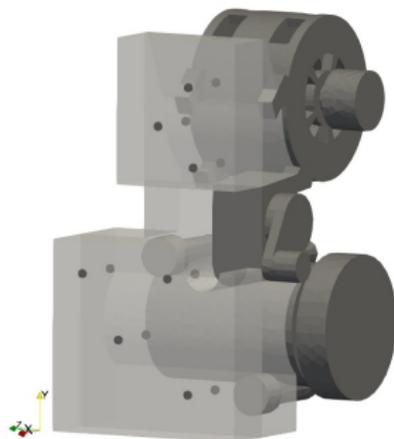
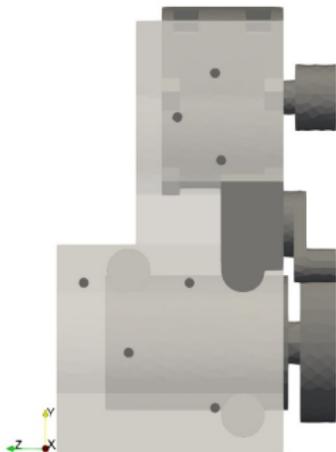


Face accessoires assemblée



Optimisation de référence : structure uniquement

⇒ Placement de 7 vis selon une proposition d'utilisation, type bureau d'études



Optimisation de référence : structure uniquement

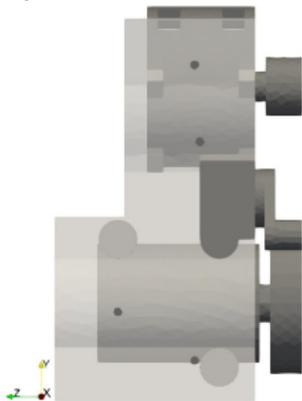
$$\begin{array}{l} \min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} V(\Omega) \\ \text{t.q.} \left\{ \begin{array}{l} C(\Omega) \leq C_0 \\ VMR_i(\Omega) \leq VM_0, \forall i \in [1, 7] \\ VMC_i(\Omega) \leq VM_0, \forall i \in [1, 7] \\ F_i(\Omega) \leq F_0, \forall i \in [1, 7] \end{array} \right. \end{array}$$

VMR : Von Mises en périphérie du noyau
 VMC : Von Mises au centre du noyau
 F : Fatigue de la vis

- ▶ $V(\Omega) = 1.13 \times 10^6 \text{ mm}^3$
- ▶ $C(\Omega) < C_0$
- ▶ Une contrainte de vis saturée

Ajout d'une vis par gradient topologique

⇒ A partir de 4 vis de la proposition d'utilisateur



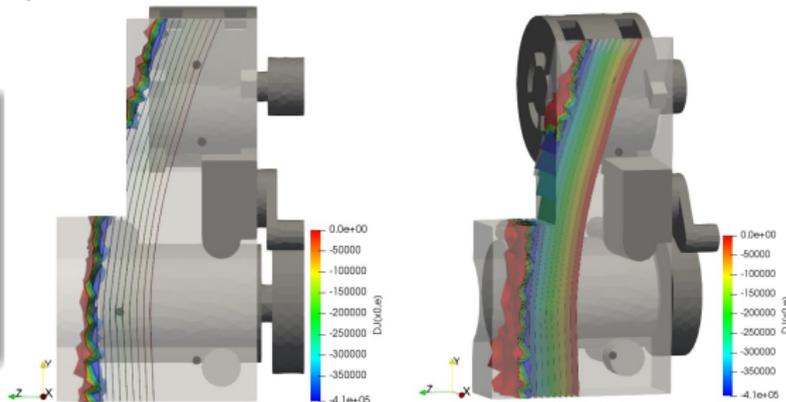
Ajout d'une vis par gradient topologique

⇒ A partir de 4 vis de la proposition d'utilisateur

Placer une 5ème vis pour diminuer la compliance

$$C(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{S2} dS$$

avec $C_0 = 325\,000 \mu\text{J}$



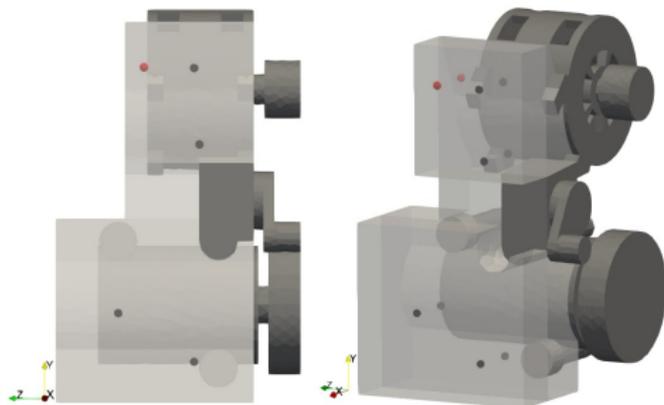
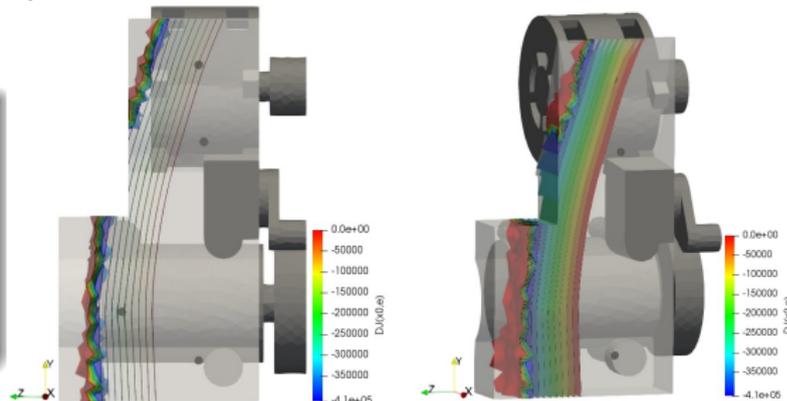
Ajout d'une vis par gradient topologique

⇒ A partir de 4 vis de la proposition d'utilisateur

Placer une 5ème vis pour diminuer la compliance

$$C(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{S2} dS$$

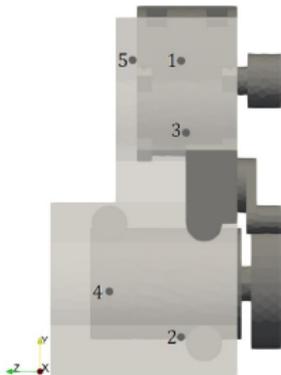
avec $C_0 = 325\,000 \mu\text{J}$



Nb vis	$C(\Omega)$	Violations VM, F
4	348 753	3
5	304 971	0

Optimisation couplée structure / positions : 5 vis

$$\begin{aligned} & \min_{(\Omega, \mathbf{X}) \in \mathcal{U}_{ad}} V(\Omega) \\ \text{t.q.} & \begin{cases} C(\Omega, \mathbf{X}) \leq C_0 \\ VMR_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq VM_0, \forall i \in [1, 5] \\ VMC_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq VM_0, \forall i \in [1, 5] \\ F_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq F_0, \forall i \in [1, 5] \end{cases} \end{aligned}$$



- ▶ $V(\Omega) = 9.56 \times 10^5 \text{ mm}^3 \Rightarrow -15.4\%$
- ▶ $d_{min} = 0.09 \text{ mm}$ pour la vis 3
- ▶ $d_{max} = 5.24 \text{ mm}$ pour la vis 4

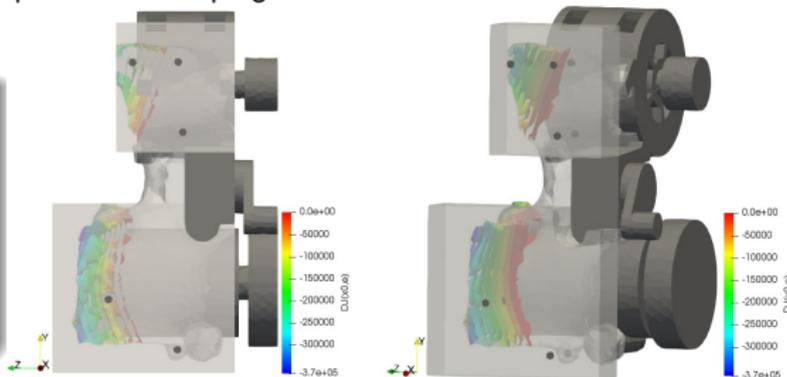
Ajout d'une vis par gradient topologique

⇒ A partir de la structure optimale du couplage avec 5 vis

Placer une 6ème vis pour diminuer la compliance

$$C(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{S2} dS$$

avec $C_0 = 325\,000 \mu\text{J}$



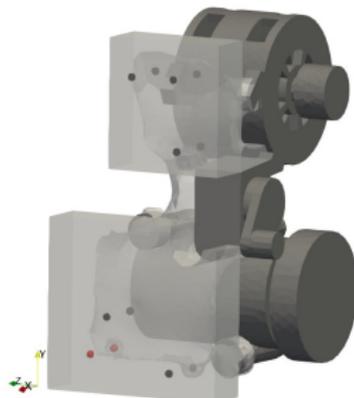
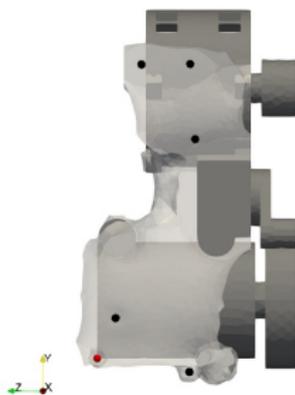
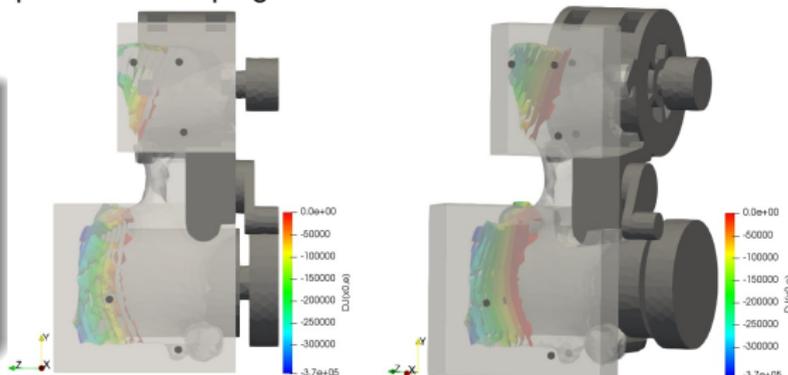
Ajout d'une vis par gradient topologique

⇒ A partir de la structure optimale du couplage avec 5 vis

Placer une 6ème vis pour diminuer la compliance

$$C(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{S2} dS$$

avec $C_0 = 325\,000 \mu\text{J}$

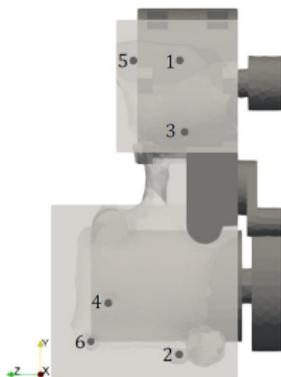


- ▶ Nouvelle compliance : $C(\Omega) = 313\,991 \mu\text{J}$
- ▶ Toutes contraintes respectées

Optimisation couplée structure / positions : 6 vis

$$\min_{(\Omega, \mathbf{X}) \in \mathcal{U}_{ad}} V(\Omega)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} C(\Omega, \mathbf{X}) \leq C_0 \\ VMR_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq VM_0, \forall i \in [1, 6] \\ VMC_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq VM_0, \forall i \in [1, 6] \\ F_i(\Omega, \mathbf{x}_i) \leq F_0, \forall i \in [1, 6] \end{cases}$$

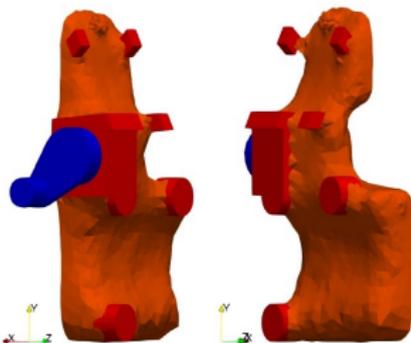


- ▶ $V(\Omega) = 8.57 \times 10^5 \text{ mm}^3 \Rightarrow \mathbf{-24.14\%}$
- ▶ $d_{min} = 0.04 \text{ mm}$ pour la vis 2
- ▶ $d_{max} = 0.72 \text{ mm}$ pour la vis 1

Récapitulatif

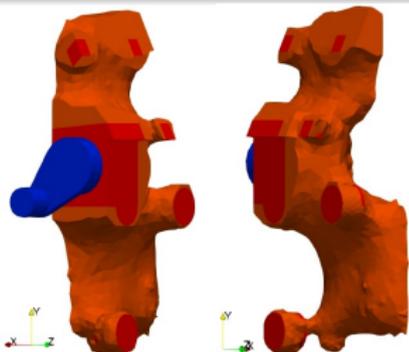
Référence - 7 vis fixes

$$V(\Omega) = 1.13 \times 10^6 \text{mm}^3$$



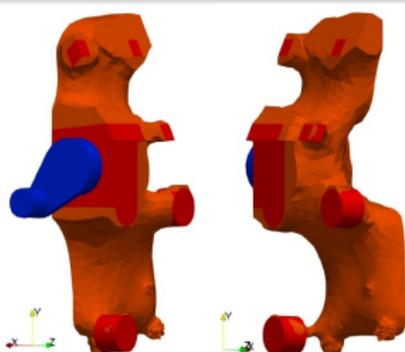
Couplage avec 5 vis

$$V(\Omega) = 9.56 \times 10^5 \text{mm}^3$$



Couplage avec 6 vis

$$V(\Omega) = 8.57 \times 10^5 \text{mm}^3$$



5. Conclusion et perspectives

Conclusion

✓ Méthodes d'optimisation

- ▶ Structure : *level-set* et dérivée de formes
- ▶ Position de vis : descente de gradient paramétrique
- ▶ Nombre de vis : gradient topologique

Conclusion

✓ Méthodes d'optimisation

- ▶ Structure : *level-set* et dérivée de formes
- ▶ Position de vis : descente de gradient paramétrique
- ▶ Nombre de vis : gradient topologique

✓ Modèle de vis idéalisée

- ▶ Représentativité physique
- ▶ Compatible avec les méthodes *level-set* et gradient topologique
- ▶ Intégration de contraintes mécaniques spécifiques

Conclusion

✓ Méthodes d'optimisation

- ▶ Structure : *level-set* et dérivée de formes
- ▶ Position de vis : descente de gradient paramétrique
- ▶ Nombre de vis : gradient topologique

✓ Modèle de vis idéalisée

- ▶ Représentativité physique
- ▶ Compatible avec les méthodes *level-set* et gradient topologique
- ▶ Intégration de contraintes mécaniques spécifiques

✓ Couplage efficace

- ▶ Application sur un cas test industriel représentatif
- ▶ Structure plus légère
- ▶ Performances mécaniques équivalentes

Perspectives

- ▶ Optimisation paramétrique de l'orientation de la vis e
- ▶ Faire varier la longueur ℓ et la raideur K
- ▶ Ajouter des trous de passage de vis
- ▶ Prendre en compte les pressions de contact
- ▶ Remplacer la compliance par des contraintes en déplacement
- ▶ Appliquer l'optimisation couplée à des problèmes de fréquences propres
- ▶ etc...

Merci!