Design d'un convertisseur modal en utilisant des ligaments fins résonants

Lucas Chesnel   Jérémy Heleine   Sergei A. Nazarov

SMAI 2021
La Grande-Motte

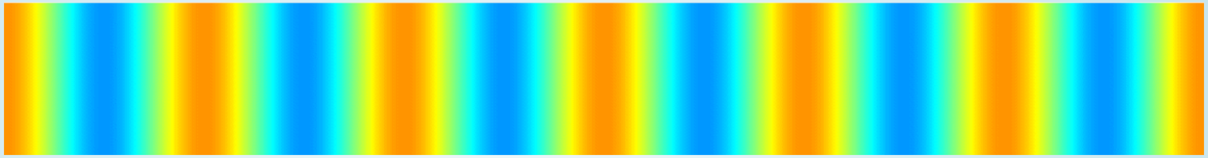
Mardi 22 juin 2021

Contexte

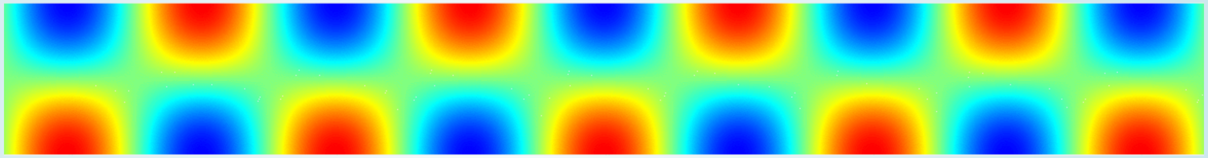
Propagation dans un guide d'onde acoustique, non borné dans la direction (Ox).

La fréquence est fixée de telle sorte à avoir deux modes propagatifs.

Mode 1 :



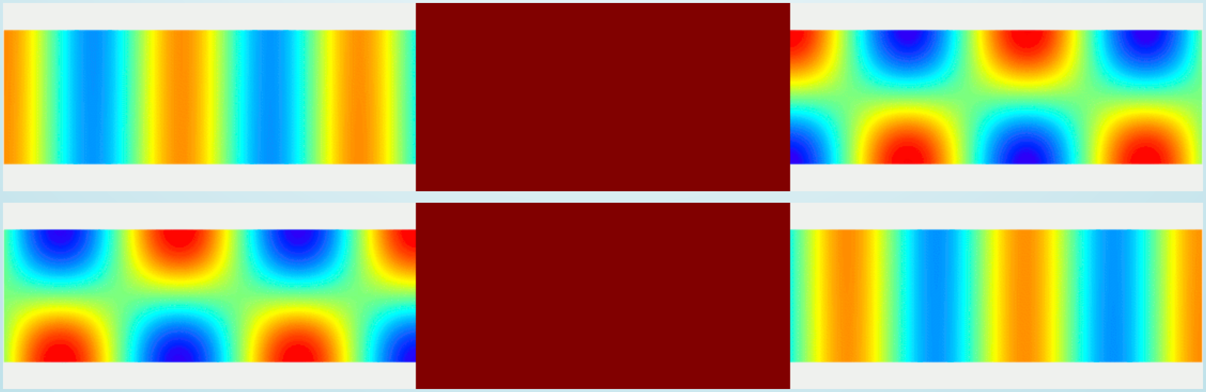
Mode 2 :



Objectif

Trouver une géométrie menant à :

1. une transmission complète de l'énergie,
2. la transmission du mode 1 vers le mode 2, et réciproquement.



Sommaire

Définition du problème

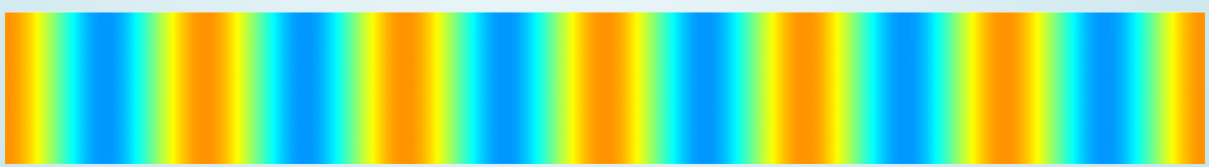
Équation de Helmholtz dans un domaine Ω non borné dans la direction (Ox):

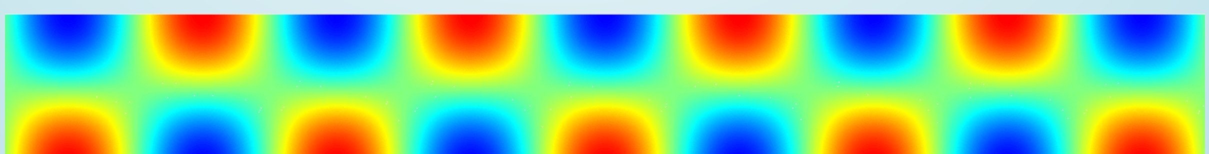
$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Deux modes propagatifs :

$$w_1^{\pm}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e^{\pm i\beta_1 x}, \quad w_2^{\pm}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} e^{\pm i\beta_2 x} \sqrt{2}\cos(\pi y),$$

avec $\beta_1 = k$ et $\beta_2 = \sqrt{k^2 - \pi^2}$.

w_1^+ : 

w_2^+ : 

Diffraction des ondes w_1^+ et w_2^+ :

$$u_j = \begin{cases} w_j^+ + r_{j1} w_1^- + r_{j2} w_2^- + \dots, & \text{quand } x \to -\infty, \\ t_{j1} w_1^+ + t_{j2} w_2^+ + \dots, & \text{quand } x \to +\infty. \end{cases}$$

Matrices de réflexion et de transmission :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Objectif

Trouver une géométrie menant aux matrices cibles :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Difficulté

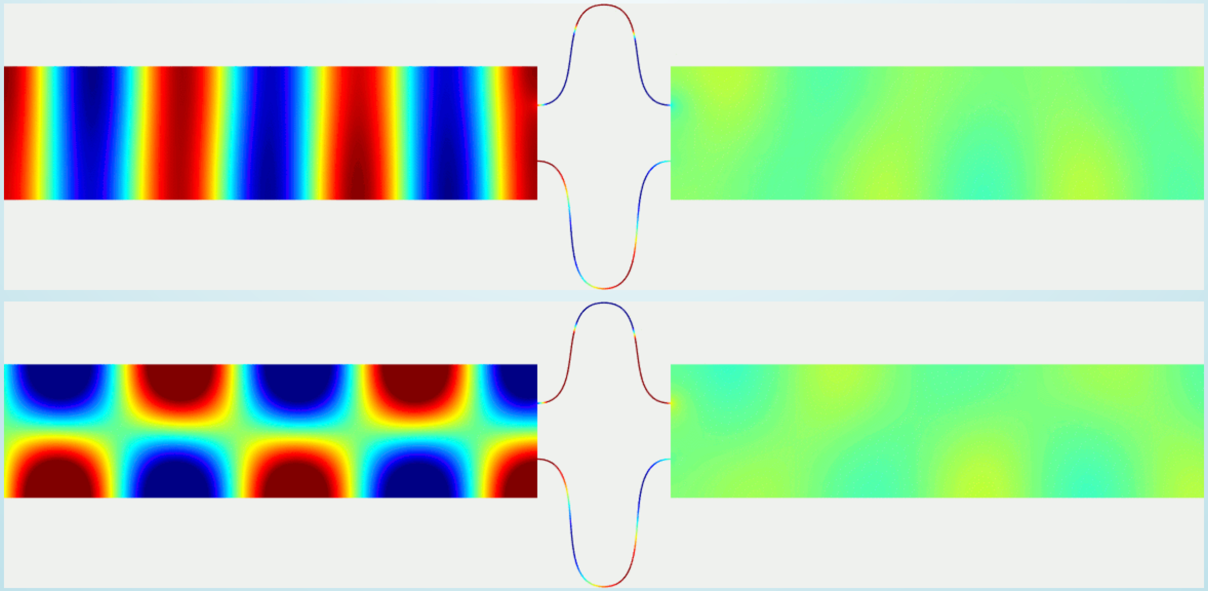
La dépendance des coefficients de diffraction par rapport à la géométrie est non linéaire et non explicite. Les techniques classiques d'optimisation sont inefficaces.

Géométrie choisie

On choisit de travailler dans un guide symétrique par rapport à l'axe (Oy), consistant en deux demi-guides connectés par des ligaments fins de largeur $\varepsilon \ll 1$.

Difficulté Ce choix peut paraître contre-intuitif, les ligaments fins impliquant une réflexion presque complète. En général, quand ε tend vers zéro, on a :

$$R^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{et} \quad T^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + o(1).$$

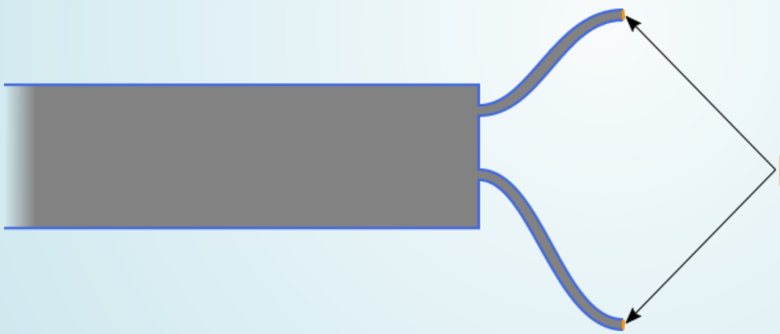


Géométrie choisie

Conditions de bords artificielles

Ω^ε supposé symétrique par rapport à (Oy). Cela nous permet de travailler sur le demi-guide :

$$\omega^\varepsilon = \{(x,y) \in \Omega^\varepsilon \ ; \ x < 0\}\,.$$



Conditions de bords artificielles de Neumann et de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u_N^\varepsilon + k^2 u_N^\varepsilon = 0, & \text{dans } \omega^\varepsilon, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_N^\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\omega^\varepsilon \cap \partial\Omega^\varepsilon, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_N^\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\omega^\varepsilon \setminus \partial\Omega^\varepsilon, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_D^\varepsilon + k^2 u_D^\varepsilon = 0, & \text{dans } \omega^\varepsilon, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_D^\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\omega^\varepsilon \cap \partial\Omega^\varepsilon, \\ u_D^\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\omega^\varepsilon \setminus \partial\Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Géométrie choisie

Coefficients de réflexion

Condition de bord artificielle de Neumann | Condition de bord artificielle de Dirichlet

Diffraction des ondes w_1^+ et w_2^+

$$u^\varepsilon_{Nj} = w_j^+ + r^{\varepsilon N}_{j1} w_1^- + r^{\varepsilon N}_{j2} w_2^- + \dots$$

$$u^\varepsilon_{Dj} = w_j^+ + r^{\varepsilon D}_{j1} w_1^- + r^{\varepsilon D}_{j2} w_2^- + \dots$$

Matrices de réflexion

$$R^\varepsilon_N = \begin{pmatrix} r^{\varepsilon N}_{11} & r^{\varepsilon N}_{12} \\ r^{\varepsilon N}_{21} & r^{\varepsilon N}_{22} \end{pmatrix}$$

$$R^\varepsilon_D = \begin{pmatrix} r^{\varepsilon D}_{11} & r^{\varepsilon D}_{12} \\ r^{\varepsilon D}_{21} & r^{\varepsilon D}_{22} \end{pmatrix}$$

Lemme

On a les identités :

$$R^\varepsilon = \frac{R_N^\varepsilon + R_D^\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = \frac{R_N^\varepsilon - R_D^\varepsilon}{2}.$$

Objectif

Matrices cibles :

$$R_N^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{et} \quad R_D^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(1).$$

Lemme

On a les identités :

$$R^\varepsilon = \frac{R_N^\varepsilon + R_D^\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = \frac{R_N^\varepsilon - R_D^\varepsilon}{2}.$$

Objectif

Matrices cibles :

$$R_N^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{et} \quad R_D^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(1).$$

→ Analyse asymptotique par rapport à la largeur des ligaments

Longueurs de résonance

Ligaments 1D

On considère la limite $\varepsilon \to 0^+$ dans les équations de Helmholtz restreintes aux ligaments fins :

$$\begin{cases} v'' + k^2 v = 0, & \text{dans }]0, \ell_\pm[, \\ v(0) = v'(\ell_\pm) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' + k^2 v = 0, & \text{dans }]0, \ell_\pm[, \\ v(0) = v(\ell_\pm) = 0. \end{cases}$$

Neumann :

$$\omega \ell_\pm = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad m \in \mathbb{N},$$
$$v(x) = a_\pm \sin(kx).$$

Dirichlet :

$$\omega \ell_\pm = m\pi, \qquad m \in \mathbb{N}^*,$$
$$v(x) = a_\pm \sin(kx).$$

Remarque Les longueurs de résonance ne sont pas les mêmes ! Cela permet de découpler l'influence des deux ligaments.

Longueurs de résonance

Asymptotique des coefficients

Ligaments de longueurs $\ell_\pm^\varepsilon = \ell_\pm + \varepsilon \ell'_\pm$ placés aux coordonnées verticales $y_\pm$.

Choix ℓ_- est résonante pour la condition de bord artificielle de Neumann, ℓ_+ est résonante pour la condition de bord artificielle de Dirichlet.

Proposition Le paramètre de longueur ℓ'_- peut être choisi tel que, quand $\varepsilon \to 0$:

$$R_N^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2 - 1}{2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2 + 1} & -\frac{2\cos(\pi y_-)\sqrt{2\beta_1/\beta_2}}{2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2 + 1} \\ -\frac{2\cos(\pi y_-)\sqrt{2\beta_1/\beta_2}}{2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2 + 1} & \frac{1 - 2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2}{1 + 2\beta_1 \cos(\pi y_-)^2/\beta_2} \end{pmatrix} + o(1)$$

avec $\beta_1 = k$ et $\beta_2 = \sqrt{k^2 - \pi^2}$.

Longueurs de résonance

Ligaments de longueurs $\ell_{\pm}^{\varepsilon} = \ell_{\pm} + \varepsilon \ell'_{\pm}$ placés aux coordonnées verticales $y_{\pm}$.

Choix ℓ_- est résonante pour la condition de bord artificielle de Neumann, ℓ_+ est résonante pour la condition de bord artificielle de Dirichlet.

Proposition Le paramètre de longueur ℓ'_+ peut être choisi tel que, quand $\varepsilon \to 0$:

$$R_D^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2 - 1}{2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2 + 1} & -\frac{2\cos(\pi y_+)\sqrt{2\beta_1/\beta_2}}{2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2 + 1} \\ -\frac{2\cos(\pi y_+)\sqrt{2\beta_1/\beta_2}}{2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2 + 1} & \frac{1 - 2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2}{1 + 2\beta_1 \cos(\pi y_+)^2/\beta_2} \end{pmatrix} + o(1)$$

avec $\beta_1 = k$ et $\beta_2 = \sqrt{k^2 - \pi^2}$.

Résultats numériques

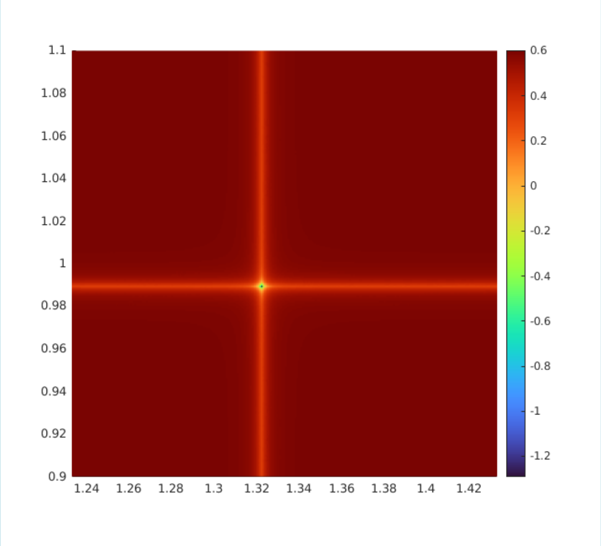
- Les positions $y_\pm$ des ligaments sont obtenues analytiquement.
- Les longueurs $\ell_\pm^\varepsilon$ sont calculées numériquement.

Soit

$$J(l_-^\varepsilon, l_+^\varepsilon) = \ln\Big(|R_N^\varepsilon(l_-^\varepsilon, l_+^\varepsilon) - R_N^*| + |R_D^\varepsilon(l_-^\varepsilon, l_+^\varepsilon) - R_D^*|\Big),$$

avec :

$$R_N^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_D^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Résultats numériques

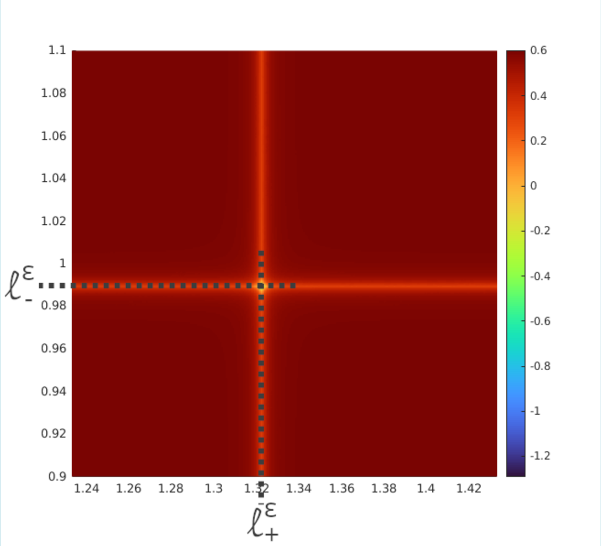
- Les positions $y_\pm$ des ligaments sont obtenues analytiquement.
- Les longueurs $\ell^\varepsilon_\pm$ sont calculées numériquement.

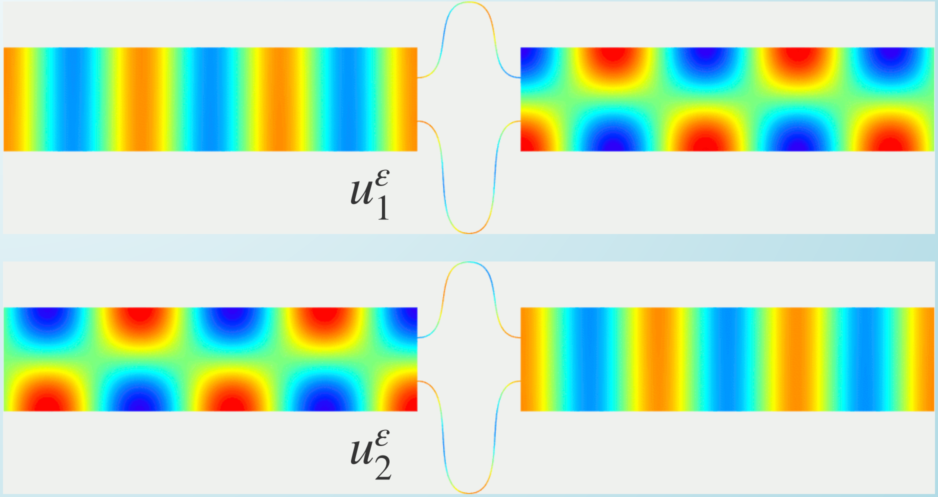
Soit

$$J(l^\varepsilon_-, l^\varepsilon_+) = \ln\Big(|R^\varepsilon_N(l^\varepsilon_-, l^\varepsilon_+) - R^*_N| + |R^\varepsilon_D(l^\varepsilon_-, l^\varepsilon_+) - R^*_D|\Big),$$

avec :

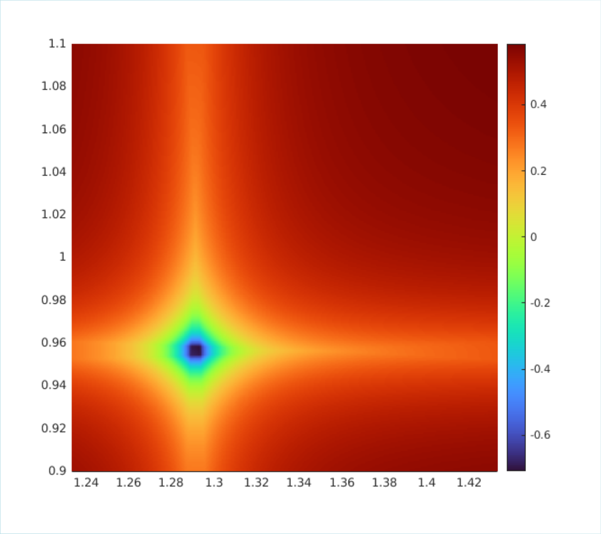
$$R^*_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^*_D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$





Résultats numériques

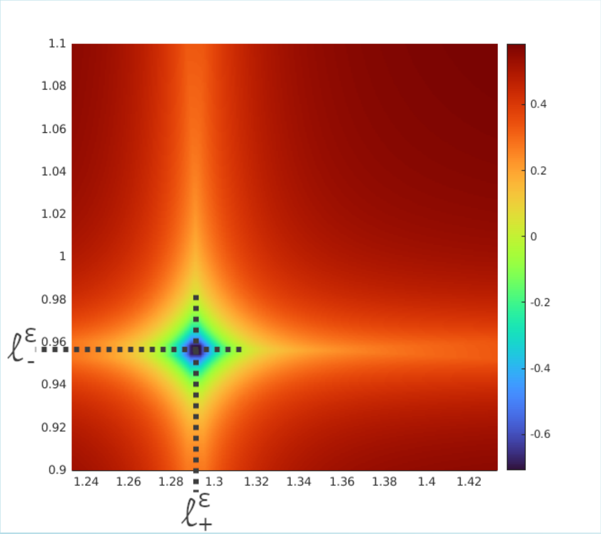
- Précédemment : $\varepsilon = 0.01$
- Ici : $\varepsilon = 0.1$

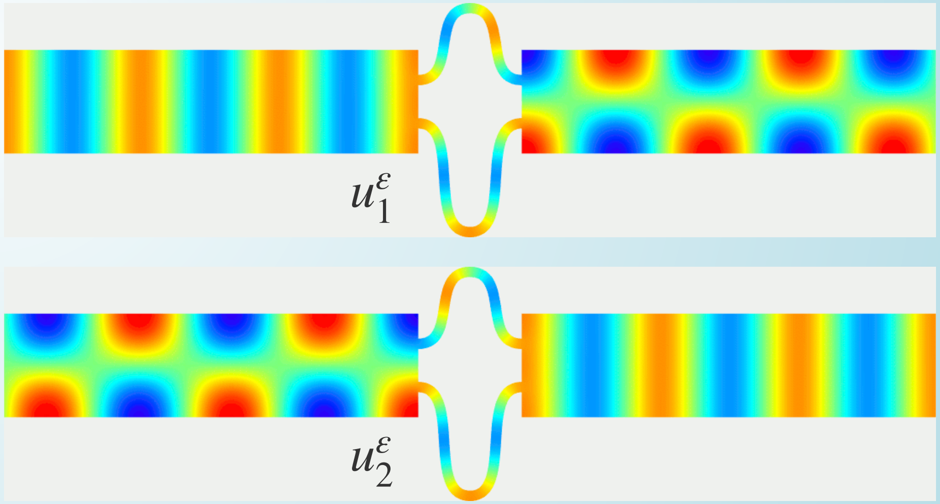


Des ligaments plus épais mènent à une conversion modale moins précise mais qui est plus robuste.

Résultats numériques

- Précédemment : $\varepsilon = 0.01$
- Ici : $\varepsilon = 0.1$

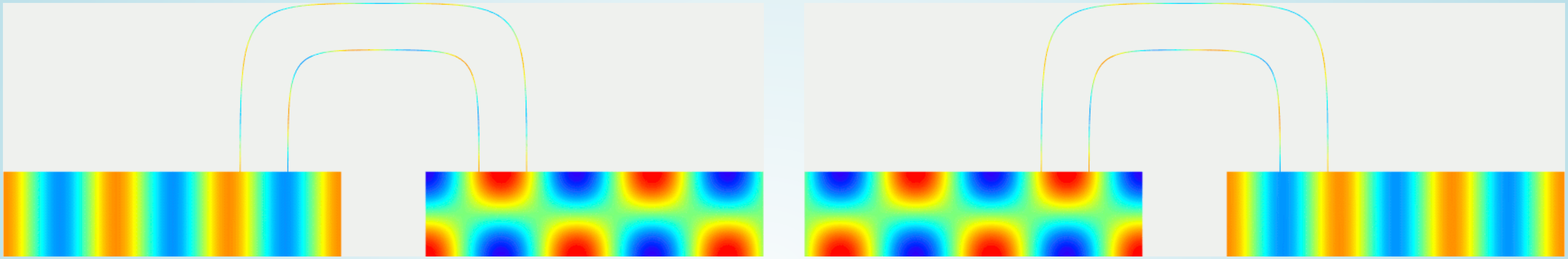




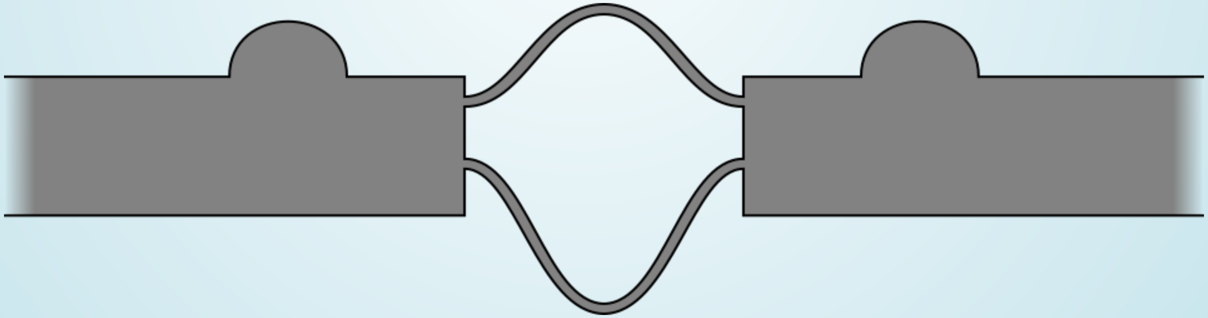
Des ligaments plus épais mènent à une conversion modale moins précise mais qui est plus robuste.

Conclusion

- Description de la construction de guides pour obtenir la conversion modale à une fréquence donnée.
- Les ligaments peuvent être placés sur le dessus des demi-guides.



- En général l'approche ne fonctionne pas sur des géométries telles que ci-dessous.



- L'approche devrait être similaire en 3D, même si des adaptations sont nécessaires dans l'analyse asymptotique.
- On étudie le problème de Dirichlet pour lequel cette approche ne fonctionne pas.
- Qu'est-ce qui peut être fait à des fréquences plus élevées... ?

Merci de votre attention