

# Simulation d'écoulement de liquide cérebrospinal avec la méthode des bases réduites

ANR HANUMAN 18-CE45-0014-01

Pierre Mollo, Stéphanie Salmon

Laboratoire de mathématiques de Reims UMR 9008

21 juin 2021

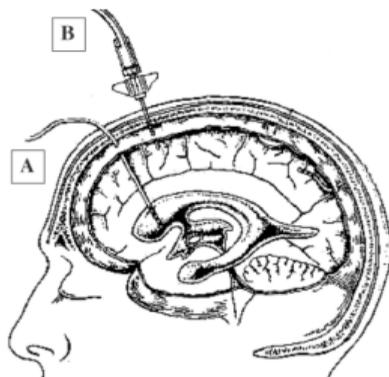


- 1 Introduction
- 2 Principe de la Méthode des Bases Réduites
- 3 Application
- 4 Perspectives et conclusion

**HANUMAN** : Human and Animal NUmerical Models for the crANio-spinal system

Dans ce projet, nous travaillons sur :

- Les interactions entre sang et liquide cérébrospinal
- Les effets de l'âge sur les circulations
- **La régulation de la pression intra-crânienne**



Simulation d'écoulements de fluides  $\rightarrow$  eq. Stokes / Navier-Stokes.

## Équations de Stokes stationnaires

Soit  $\mu \in \mathcal{D}$ , trouver  $(u(\mu), p(\mu)) \in (H^1(\Omega_\mu))^2 \times L^2(\Omega_\mu)$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u(\mu) + \nabla p(\mu) = f_\mu & \text{dans } \Omega_\mu \\ \nabla \cdot u(\mu) = 0 & \text{sur } \Omega_\mu \\ u(\mu) = g_\mu & \text{sur } \Gamma_{Dir,\mu} \\ \nu \frac{\partial u(\mu)}{\partial \vec{n}} + p(\mu) \vec{n} = h_\mu & \text{sur } \Gamma_{Neu,\mu} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{A}_\mu & \mathbb{B}'_\mu \\ \mathbb{B}_\mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mu) \\ \mathbf{p}(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Premières difficultés :

- problème vectoriel,
- problème non coercitif (en EF Taylor-Hood ou stabilisation, en BR supremizer [3]).

Nous notons  $\mathcal{D}$  l'espace du paramètre  $\mu$  et nous notons  $u(\mu)$  la solution de notre problème  $\mathcal{P}_\mu$ .

Nous avons :

$$\mathcal{M} = \{u(\mu) \in V, \forall \mu \in \mathcal{D}\}.$$

Nous posons maintenant  $S = \{\mu_1, \dots, \mu_N\}$  et  $\{u(\mu_1), \dots, u(\mu_N)\}$  les  $N$  *snapshots* associées.

Nous avons :

$$\mathcal{M} \simeq \text{Vect}(u(\mu_1), \dots, u(\mu_N)),$$

ainsi pour  $\mu \in \mathcal{D}$  :

$$u(\mu) \simeq \sum_{i=1}^N \alpha_i u(\mu_i).$$

Stratégie *online/offline* :

## *Offline* ⇒ Création de la base

- Pré-traitement
- Temps de calcul long
- Résolution de nombreux problèmes EF

## *Online* ⇒ Utilisation de la base

- Problème réduit
- Résolution BR très rapide
- Calcul de valeurs d'intérêt

# Hypothèse de décomposition

Pour appliquer la MBR nous avons besoin d'une hypothèse de décomposition affine par rapport au paramètre, c'est-à-dire :

$$\forall \mu \in \mathcal{D}, \quad a(u, v; \mu) = \sum_{q=0}^Q \theta_q(\mu) a(u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A}_\mu = \sum_{q=0}^Q \theta_q(\mu) \mathbb{A}_q. \quad (2)$$

Si nous utilisons cette propriété avec les  $N$  snapshots  $\{u(\mu_i)\}_{i=1}^N$  nous obtenons un problème de faible dimension :

$$\forall \mu \in \mathcal{D}, \quad a(u, v; \mu) = \sum_{q=0}^Q \theta_q(\mu) a(u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A}_\mu^N = \sum_{q=0}^Q \theta_q(\mu) \mathbb{A}_q^N. \quad (3)$$

Si la décomposition n'est pas directe  $\rightarrow$  **Méthode d'Interpolation Empirique** [2].

Il y a deux grandes familles de méthodes : **Spectrales** et **Gloutonnes**. Pour nos problèmes nous utilisons un algorithme glouton :

---

**Algorithm 1** Greedy approach

---

**Require:**  $\varepsilon, \mu_1, n = 1$

Find  $u(\mu_n)$  solution of  $\mathcal{P}_\mu$

$V_N \leftarrow \text{Vect}(u(\mu_n))$

...

---

---

---

...

**for**  $\mu \in \mathcal{D}$  **do**

Find  $u_N(\mu) \in V_N$  solution of  $\mathcal{P}_\mu$

Compute  $\eta(\mu) = \|u(\mu) - u_N(\mu)\|$

**end for**

$\mu_{n+1} = \arg \max_{\mu \in \mathcal{D}_h} \eta(\mu)$

**if**  $\eta(\mu_{n+1}) < \varepsilon$  **stop**

---

Nous pouvons majorer l'erreur commise par une base réduite avec la formule suivante [3, 5] :

$$\eta(\mu) = \|u(\mu) - u_N(\mu)\| \leq \frac{\|r(u_N, \mu)\|}{\beta(\mu)}, \quad (4)$$

avec le **résidu** :

$$r(u_N, \mu) = \mathbf{F}_\mu - \mathbb{A}_\mu u_N(\mu), \quad (5)$$

et la **constante *inf-sup*** :

$$\beta(\mu) = \inf_{v \in V} \sup_{w \in V} \frac{b(v, w; \mu)}{\|v\|_V \|w\|_V}. \quad (6)$$

Utilisation de la décomposition pour rendre l'estimation utilisable dans le contexte BR.

Dans le cas du résidu, on exploite la décomposition affine :

$$\begin{aligned}\|r(u_N, \mu)\|^2 &= \left( \mathbf{F}_\mu - \mathbb{A}_\mu u_N(\mu), \mathbf{F}_\mu - \mathbb{A}_\mu u_N(\mu) \right), \\ &= \mathbf{F}_\mu^t \mathbf{F}_\mu - 2 \mathbf{F}_\mu^t \mathbb{A}_\mu u_N(\mu) + (u_N(\mu) \mathbb{A}_\mu)^t \mathbb{A}_\mu u_N(\mu) \\ &= \sum_{q=1}^Q \Theta_q(\mu) u_N(\mu).\end{aligned}$$

Plus compliqué dans le cas de la constante *inf-sup* ...

- Méthodes d'interpolation classiques  $\rightarrow$  efficaces mais non certifiées [3, 1],
- *Successive Constraint Method*  $\rightarrow$  lourde mais certifiée [4].

## Paramètres

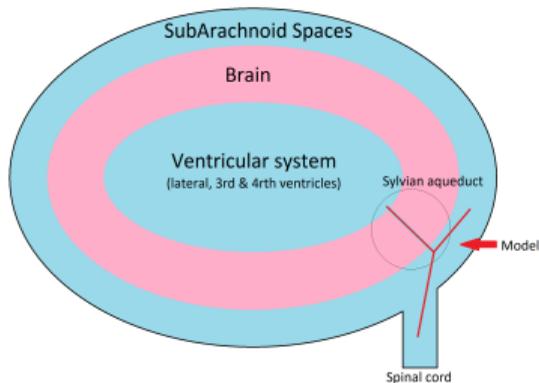
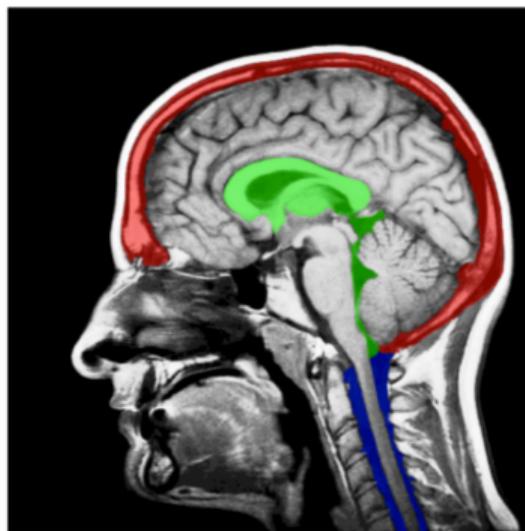
- **physiques** → Nombre de Reynolds, fonction d'entrée, etc.
- **géométriques** → déformation du domaine  $\Omega_\mu$ .

## Nos motivations

- développer des modèles «patient spécifique»,
- ajuster les paramètres de simulation,
- *estimer des paramètres.*

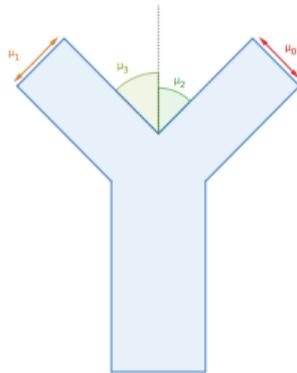
# Application

Modèle de distribution du Liquide CérébroSpinal  
patient spécifique → paramètres géométriques,  
retrouver les résistances → paramètres physiques.



## Paramètres du modèle

$\mu_0, \mu_1$  tailles des sections,  
 $\mu_2, \mu_3$  angles des sections,  
 $\mu_4, \mu_6$  résistances des sorties.



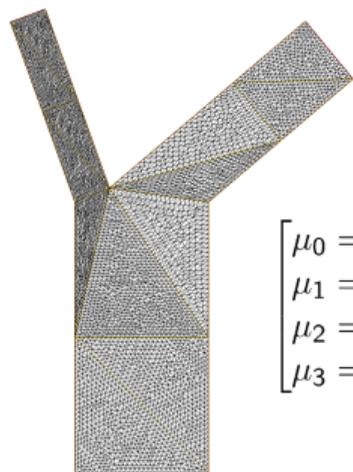
FE : Taylor-Hood  
NDDL : 36328

# Application

Modèle de répartition du Liquide CérébroSpinal  
patient spécifique → paramètres géométriques,  
retrouver les résistances → paramètres physiques.

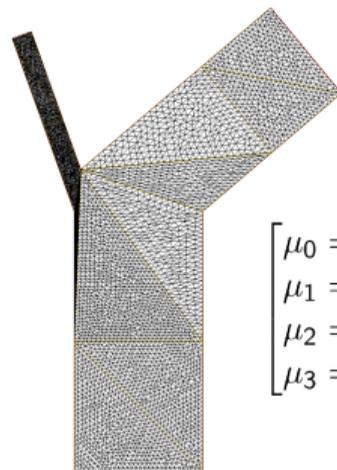
Exemples :

non-pathological



$$\begin{bmatrix} \mu_0 = 0.55563 \\ \mu_1 = 0.27778 \\ \mu_2 = 0.69813 \\ \mu_3 = 1.22170 \end{bmatrix}$$

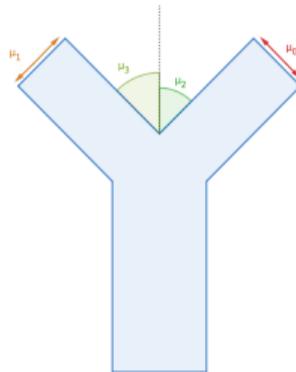
pathological



$$\begin{bmatrix} \mu_0 = 0.85714 \\ \mu_1 = 0.15714 \\ \mu_2 = 0.69813 \\ \mu_3 = 1.22170 \end{bmatrix}$$

## Paramètre du modèle

$\mu_0, \mu_1$  tailles des sections,  
 $\mu_2, \mu_3$  angles des sections,  
 $\mu_4, \mu_6$  résistances des sorties.



FE : Taylor-Hood  
NDDL : 36328

# Application : Témoin

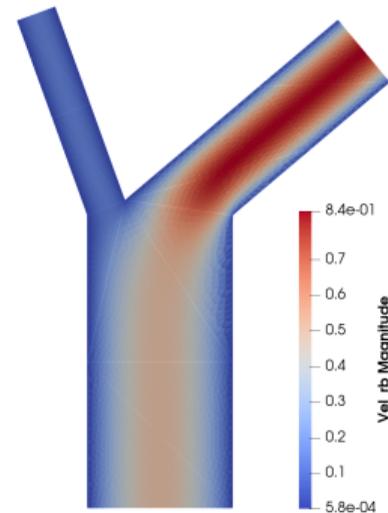
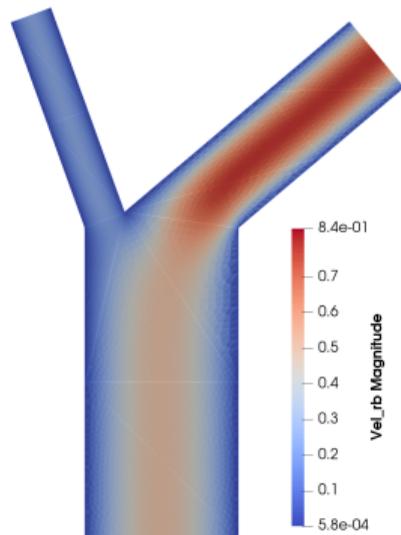
## Distribution

- Objectif : 12,2% / 87,8%
- Sans résistance : 20,7% / 79,3%

## Résultats

Résistance :  $\mu_4 = 0.32088$

Saut de pression :  $\delta p = 0.0597$



# Application : Pathologique

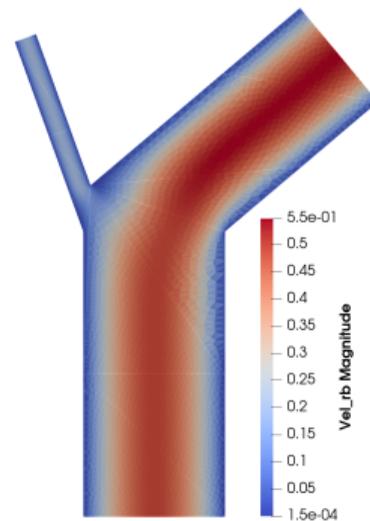
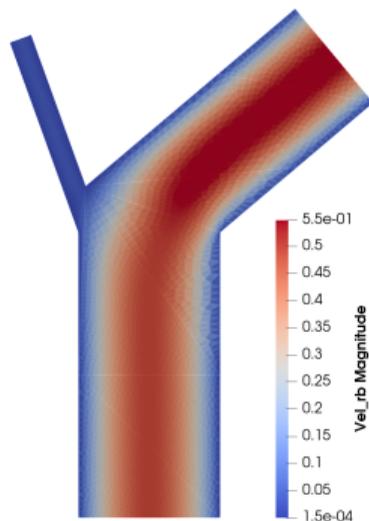
## Distribution

- Objectif : 24,6% / 75,4%
- Sans résistance : 4,2% / 95,8%

## Résultats

Résistance :  $\mu_4 = -1,20768$

Saut de pression :  $\delta p = 0.1175$



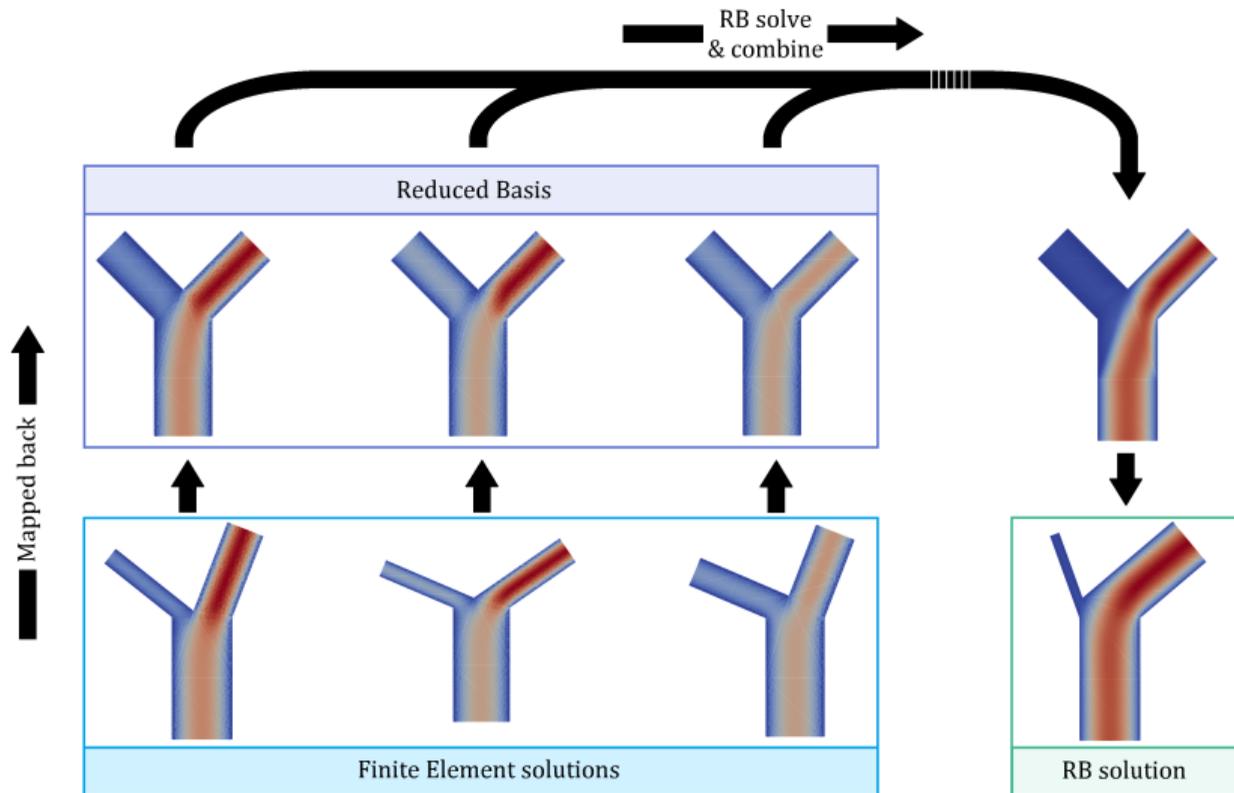
# Conclusion

## Conclusion

- EDP paramétrées,
- Stratégie *online/offline*,
- Choix des snapshots **glouton**, spectrale,
- Taille de la base  $N \ll \mathcal{N}$ .

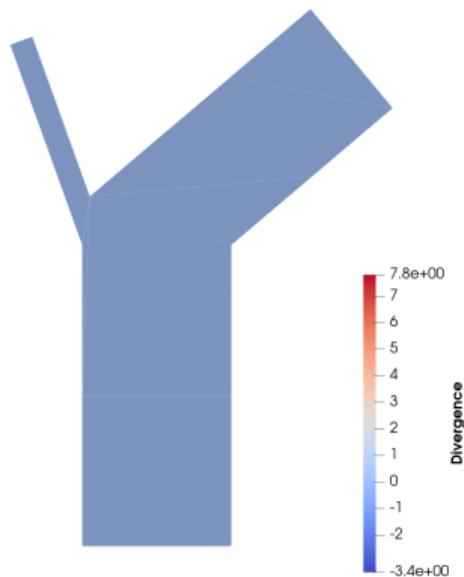
## Perspectives

- Équations non-linéaires (Navier-Stokes),
- Équations instationnaires,
- Géométries plus complexes.



-  Jan S Hesthaven, Gianluigi Rozza, and Benjamin Stamm.  
*Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing, Cham, 2016.
-  Yvon Maday, Ngoc Cuong Nguyen, Anthony T. Patera, and George S.H. Pau.  
A general, multipurpose interpolation procedure : the magic points.  
September 2007.
-  Alfio Quarteroni, Andrea Manzoni, and Federico Negri.  
*Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations*, volume 92 of *UNITEXT*. Springer International Publishing, Cham, 2016.
-  S. Sen, K. Veroy, D. B. P. Huynh, S. Deparis, N. C. Nguyen, and A. T. Patera.  
“Natural norm” a posteriori error estimators for reduced basis approximations.  
*Journal of Computational Physics*, 217(1) :37–62, September 2006.
-  Karen Veroy, Christophe Prud’Homme, Dimitrios V. Rovas, and Anthony T. Patera.  
A Posteriori Error Bounds for Reduced-Basis Approximation of Parametrized Noncoercive

La divergence nulle est conservée même après déformation :



Évolution de l'erreur pour l'exemple de la bifurcation (4 paramètres) :

